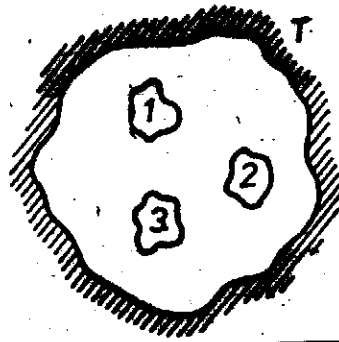


Wykład 2

Prawo Kirchhoffa.

Do opisu promieniowania rzeczywistych ciał, wprowadza się 2 funkcje, których kształt ustala się dla każdego ciała doświadczalnie. Są to zdolność emisyjna ciała M . i zdolność absorpcyjna A . Zdolność emisyjna to strumień promieniowania emitowany przez jednostkę powierzchni źródła. Jeśli odnieść ją do przedziału spektralnego $\Delta\lambda$, to mówimy o spektralnej zdolności emisyjnej e_λ . Stopień absorpcji promieniowania określa zdolność absorpcyjna. Jest to stosunek strumienia promieniowania zaabsorbowanego do strumienia padającego na ciało. Jeśli odnieść ją do przedziału spektralnego $\Delta\lambda$, to mówimy o spektralnej zdolności absorpcyjnej a_λ . Zarówno zdolność emisyjna jak i zdolność absorpcyjna zależą od temperatury ciała, T . Dlatego spektralne zdolności emisyjną i absorpcyjną zwykle określa się jako funkcje długości fali i temperatury, $e_\lambda(\lambda, T)$ i $a_\lambda(\lambda, T)$.

Wyobraźmy sobie układ ciał, które nie stykają się ze sobą i znajdują się w pewnym układzie zamkniętym w którym panuje próżnia (patrz rys. 1).



Rys. 1.

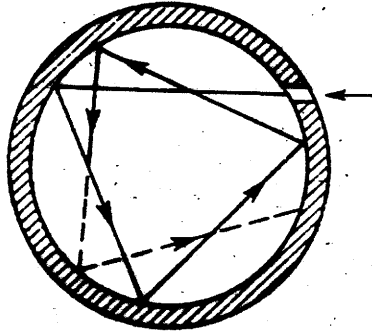
Jeśli wyjściowo temperatury tych ciał są różne, to jak pokazuje doświadczenie, po pewnym czasie układ osiągnie stan równowagi i temperatury ciał wyrównają się. Dzieje się tak dzięki wymianie – emisji i absorpcji – fotonów między ciałami. Ciała o większej zdolności emisyjnej tracą w jednostce czasu więcej energii niż ciała o mniejszej zdolności emisyjnej. Jeśli jednak pozostają w stanie równowagi termodynamicznej z innymi ciałami, to oznacza to, że muszą również odpowiednio więcej energii zaabsorbować w jednostce czasu. W konsekwencji, stosunek spektralnej zdolności emisyjnej do spektralnej zdolności absorpcyjnej ciał jest taką samą funkcją długości fali i temperatury, niezależną od rodzaju ciała:

$$\frac{e_\lambda(\lambda, T)}{a_\lambda(\lambda, T)} = f(\lambda, T) \quad (1)$$

Równanie (1) stanowi treść prawa Kirchhoffa.

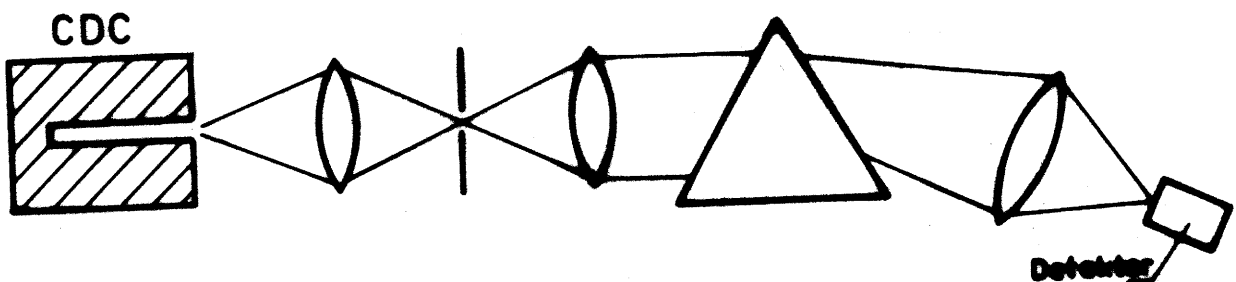
Z równania (1) nie wynika oczywiście jaka jest postać funkcji $f(\lambda, T)$. Doświadczalne zbadanie postaci tej funkcji nie jest łatwe, gdyż wymaga jednoczesnego pomiaru zdolności emisyjnej i zdolności absorpcyjnej ciała. Dlatego też w rozważaniach dotyczących promieniowania cieplnego wprowadza się pojęcie ciała, którego zdolność absorpcyjna dla wszystkich długości fal i w każdej temperaturze jest równa jedności. Oznacza to, że takie ciało, zwane ciałem doskonale czarnym (CDC), absorbuje całkowicie padające nań promieniowanie, niezależnie od długości fali i temperatury.

Dla CDC, $a_{\lambda}(\lambda, T) = 1$ i zgodnie z równaniem (1), zdolność emisyjna CDC jest poszukiwaną funkcją $f(\lambda, T)$. W przyrodzie nie ma ciał o własnościach CDC. Sadza w zakresie widzialnym ma zdolność absorpcyjną bliską 1 ale w dalekiej podczerwieni spada ona znacznie poniżej jedności. Sztucznym modelem CDC jest mały otworek w osłonie z nieprzezroczystego materiału (patrz rys2.). Promieniowanie wpadające do otworka na skutek wielokrotnych odbić od ścian wewnątrz jest niemal całkowicie absorbowane, niezależnie od długości fali λ (otwarte okna domów oglądane z ulicy są również niezłym przykładem CDC).



Rys.2. Model CDC

Na rys.3. przedstawiono układ pomiarowy służący do wyznaczania spektralnej zdolności emisyjnej CDC. Wiązka promieniowania wychodząca z otworu wyjściowego CDC jest skupiana na szczelinie wejściowej spektrometru. W spektrometrze znajduje się element dyspersyjny (pryzmat lub siatka dyfrakcyjna) który rozszczepia światło na fale quasi-monochromatyczne. To światło następnie jest kierowane na detektor promieniowania. Sygnał na wyjściu tego detektora odwzorowuje spektralną zdolność emisyjną CDC, czyli funkcję $f(\lambda, T)$.



Rys.3. Układ do pomiaru $f(\lambda, T)$.

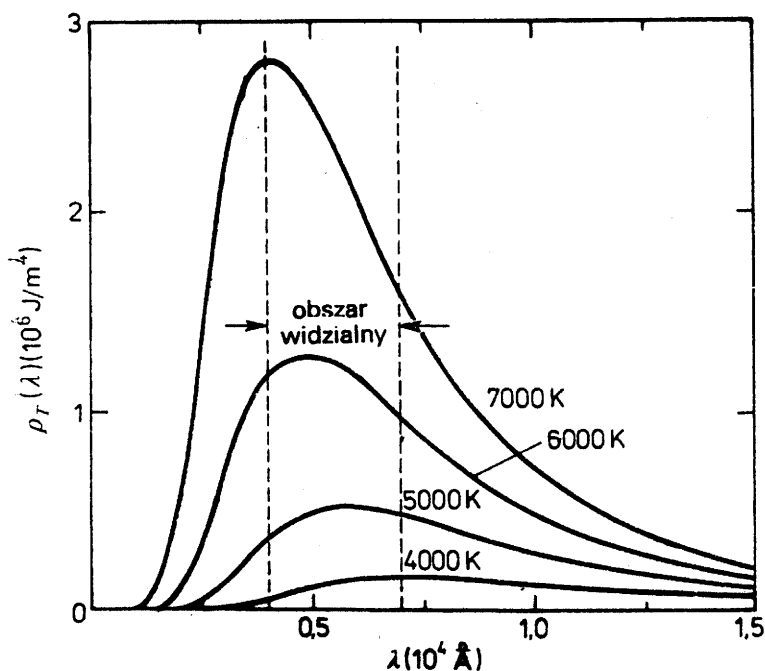
Na rys.4. przedstawiono wykres spektralnej zdolności emisyjnej, czyli $e_{\lambda}(\lambda, T)$ w funkcji długości fali λ , który uzyskuje się przy pomocy przedstawionego powyżej pomiaru dla trzech różnych temperatur CDC.

Jak wynika z rys.4 pole pod krzywą dla każdej temperatury jest tym większe im wyższa jest temperatura CDC. Jeśli scałkujemy spektralną zdolność emisyjną po wszystkich długościach fal λ to otrzymamy całkowitą zdolność emisyjną, a to jest właśnie pole pod wykresem funkcji $f(\lambda, T)$ na rys.4. Jak pokazał Boltzmann, wartość tej całki jest równa:

$$M = \int_0^{\infty} e_{\lambda} d\lambda = \sigma T^4 \quad (2)$$

gdzie stała $\sigma = 5.7 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ i nazywa się stałą Stefana - Boltzmann. Zgodnie ze wzorem (2), całkowita zdolność emisyjna CDC jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury ciała. Powyższe sformułowanie stanowi treść prawa Stefana - Boltzmann. Zgodnie z tym prawem, CDC o powierzchni A i temperaturze T, które znajduje się w otoczeniu o temperaturze T_0 emituje strumień promieniowania Φ równy:

$$\Phi = A \sigma (T^4 - T_0^4) \quad (3)$$



$$e_{\lambda} = \frac{e_{T(\lambda)} \cdot c}{4}$$

(patrz wzór (15))

Rys.4. Widmo promieniowania CDC

Jak wynika z rys.4., ze wzrostem temperatury CDC maksimum spektralnej zdolności emisyjnej przesuwa się w stronę fal krótszych. To przesuwanie się długości fali λ_{\max} , odpowiadającej maksimum zdolności emisyjnej, opisuje prawo Wien:

$$\lambda_{\max} T = 2898 \cdot 10^{-6} \text{ m K} = 2898 \text{ \mu m K} \quad (4)$$

W tabeli I przedstawiono długości fal λ_{\max} dla kilku źródeł promieniowania o określonej temperaturze. Prawo Wien wyjaśnia znane zjawisko zmiany barwy świecenia nagrzewanych ciał. I tak dla temperatury pokojowej - maksimum zdolności emisyjnej przypada na obszar podczerwieni. W miarę podwyższania się temperatury maksimum przesuwa się ku widzialnej części widma przy czym jako pierwsze pojawia się świecenie czerwone. Następnie świecenie obejmuje dalsze części widma i w rezultacie świeci białym żarem.

Prawo odwrotnych kwadratów.

Rozważmy mały element powierzchni dA CDC i strumień promieniowania Φ z tego elementu do półprzestrzeni. Jeśli element powierzchni może być rozpatrywany jako źródło

Tabela I

Temperatura		Długość fali [μm]	Emiter
$^{\circ}\text{K}$	$^{\circ}\text{C}$		
273	0	11	lód
373	100	8	wrząca woda
473	200	6,3	kolba do lutowania
573	300	5,2	żelazko do prasowania
773	500	3,9	gorące żelazo
1 273	1 000	2,3	grzejnik Ni-Cr
2 848	2 575	1,0	włókno wolframowe
3 000	2 727	0,97	żarówka samochodowa

punktowe, wówczas natężenie napromieniowania na powierzchni półkuli o promieniu r_1 wynosi (patrz rys.5):

$$E_{r1} = \Phi / (2 \pi r_1^2) \quad (5)$$

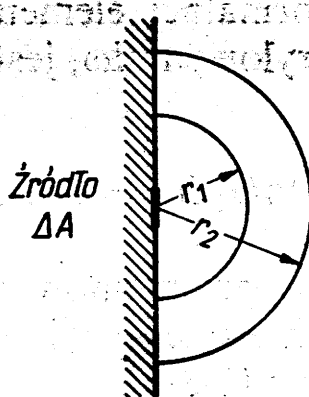
zaś na powierzchni półkuli o promieniu r_2 :

$$E_{r2} = \Phi / (2 \pi r_2^2) \quad (6)$$

Z równania (5) i (6) mamy zatem:

$$E_{r1} / E_{r2} = (r_2^2 / r_1^2) \quad (7)$$

Tak więc natężenie napromieniowania zmienia się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości między źródłem a detektorem promieniowania. Prawo to nazywa się prawem odwrotnych kwadratów.



Rys.5. Ilustracja prawa odwrotnych kwadratów.

Wyprowadzimy teraz zależność między emitancją M ciała doskonale czarnego a gęstością energii zrównoważonego promieniowania cieplnego wewnątrz CDC. Wektor \mathbf{j} gęstości strumienia energii promieniowania elektromagnetycznego rozchodzącego się w jednym kierunku wyraża się wzorem:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{c} \quad (8)$$

gdzie ρ jest gęstością energii zaś \mathbf{c} oznacza wektor prędkości fali elektromagnetycznej. Wewnątrz CDC promieniowanie elektromagnetyczne rozchodzi się we wszystkich kierunkach, należy więc wziąć pod uwagę strumień energii $\rho \mathbf{c}$ równomiernie rozłożony po kacie bryłowym 4π . Zatem z każdego punktu płynie strumień energii o gęstości równej:

$$d\mathbf{j} = \rho \mathbf{c} d\Omega / (4\pi) \quad (9)$$

Jak było pokazane na wykładzie pierwszym, kąt bryłowy $d\Omega$ można zapisać we współrzędnych sferycznych:

$$d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (10)$$

Weźmy elementarny wycinek powierzchni dA wnęki. Strumień promieniowania wysyłany przez tę powierzchnię w kąt bryłowy $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$, nachylony do normalnej do dA pod kątem ϑ jest równy:

$$d\Phi = d\mathbf{j} dA \cos \vartheta = \frac{\rho \mathbf{c}}{4\pi} d\Omega dA \cos \vartheta = \frac{\rho \mathbf{c}}{4\pi} dA \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (11)$$

Zatem strumień energii wysyłany w półprzestrzeń będzie równy:

$$\Phi = \frac{\rho \mathbf{c}}{4\pi} \int_{\vartheta} \int_{\varphi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dA \quad (12)$$

Porównując to równanie z równaniem opisującym taki sam strumień promieniowania ale przy pomocy luminancji (otrzymanym z prawa Lamberta)

$$\Phi = L \int_{\vartheta} \int_{\varphi} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dA \quad (13)$$

otrzymuje się:

$$L = \frac{\rho \mathbf{c}}{4\pi} \quad (14)$$

Ponieważ dla źródła lambertowskiego $M = L \pi$, to ostatecznie otrzymujemy:

$$M = \frac{\rho \mathbf{c}}{4} \quad (15)$$

Prawo Plancka

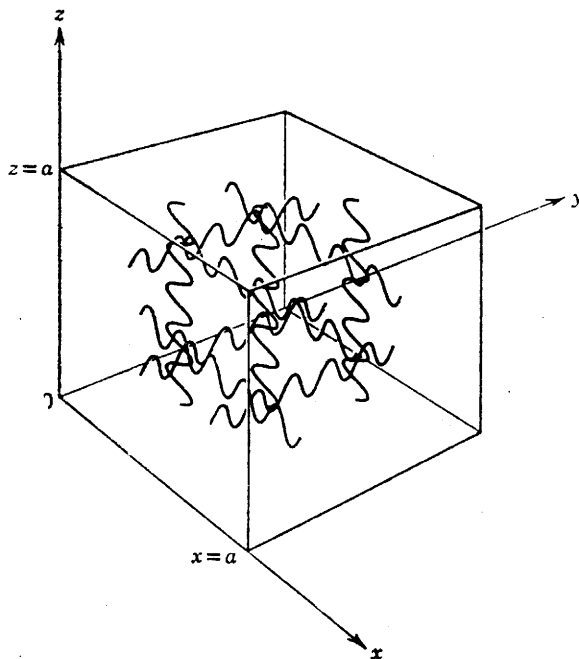
Na rys.4. przedstawiono widmo promieniowania CDC otrzymane w wyniku eksperymentu. Próba dopasowania modelem teoretycznym promieniowania emitowanego przez CDC, opartym na gruncie teorii falowej światła nie powiodła się. Dopiero Planck odniósł sukces, znajdując postać funkcji dokładnie odpowiadającej tej krzywej doświadczalnej. Musiał w tym celu zrobić założenie, że promieniowanie elektromagnetyczne emitowane jest w postaci osobnych porcji energii o wartościach proporcjonalnych do częstości promieniowania ν :

$$\varepsilon = h\nu \quad (16)$$

Współczynnik proporcjonalności nazwany został stałą Plancka i jest równy $6.6 \cdot 10^{-34} \text{Js}$. Jeśli promieniowanie emitowane jest porcjami po $h\nu$, to jego energia jest równa wielokrotności $h\nu$:

$$\varepsilon_n = nh\nu \quad (17)$$

Rozpatrzmy wnękę CDC (patrz rys. 6).



Wnęka w kształcie sześcianu o metalowych ścianach wypełniona promieniowaniem elektromagnetycznym. Pokazane są trzy nieinterferujące ze sobą składowe tego promieniowania, odbijające się od ścian tam i z powrotem; tworzą one fale stojące z węzłami na każdej ścianie

Rys.6. Wnęka – model CDC

W stanie równowagi energia powinna rozkładać się na poszczególne oscylacje wg. prawa Boltzmann^{*}. Prawdopodobieństwo tego, że energia oscylacji o częstości ν ma wartość ε_n , określone jest wzorem:

$$p_n = \frac{e^{-\varepsilon_n/kT}}{\sum_n e^{-\varepsilon_n/kT}} \quad (18)$$

* do rozkładu Boltzmannowego używamy następujących wyliczeń

Znając prawdopodobieństwo pojawiania się poszczególnych wartości energii oscylacji, można znaleźć średnią wartość tej energii, $\langle \varepsilon \rangle$:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_n p_n \varepsilon_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}} \quad (19)$$

Niech teraz $h\nu/kT = x$, i założmy, że x może przyjmować wartości ciągłe. Wówczas mamy:

$$\langle \varepsilon \rangle = h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}} = -h\nu \frac{d}{dx} \ln \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \quad (20)$$

Argumentem logarytmu we wzorze (20) jest suma nieskończonego szeregu, którego pierwszy wyraz jest równy 1 a iloraz e^{-x} . Ponieważ iloraz jest mniejszy od jedności to szereg jest zbieżny i jego suma jest równa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

Podstawiając sumę szeregu do (10) i różniczkując otrzymujemy:

$$\langle \varepsilon \rangle = -h\nu \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1 - e^{-x}} = h\nu \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{h\nu}{e^x - 1} \quad (21)$$

Podstawiając ponownie $h\nu/kT = x$, otrzymujemy:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (22)$$

Zauważmy, że dla ν dążącego do zera (czyli jeśli zbiór dozwolonych energii jest ciągły), wzór (22) przekształca się w wyrażenie $\langle \varepsilon \rangle = kT$ (wówczas bowiem $e^{h\nu/kT} \approx 1 + h\nu/kT$).

Można pokazać, że liczba fal stojących dn_ν mieszczących się w jednostce objętości wnęki jest równa:

$$dn_\nu = 8\pi \nu^2 d\nu / c^3 \quad (23)$$

Tak więc jeśli na jedną falę przypada $\langle \varepsilon \rangle$ wg wzoru (22) to gęstość energii na przedział częstości $d\nu$:

$$\rho(\nu, T) d\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} 8\pi \nu^2 d\nu/c^3 \quad (24)$$

Korzystając z zależności (15) otrzymujemy ostatecznie wzór na emitancję spektralną CDC:

$$e_\nu = \frac{2h\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \frac{1}{c^2} \quad (25)$$

Właśnie ten wzór został wyprowadzony przez Plancka i nazywa się prawem Plancka.