Fizyka 3.3

Wykład II

Model atomu Bohra

Postulaty Bohra

- Elektrony poruszają się wokół jądra po orbitach stacjonarnych.
- Atom emituje promieniowanie, gdy elektron przechodzi z jednej orbity stacjonarnej na drugą.
- Częstotliwość promieniowania jest dana wzorem

$$hf = E_m - E_n \qquad h = 6.63 \cdot 10^{-34} Js$$

gdzie E_m, E_n oznaczają energie tych stanów.

- Moment pędu elektronu jest skwantowany

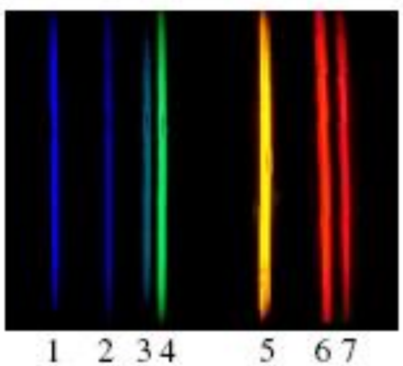
$$m_e vr = n\frac{h}{2\pi}$$

Atomu wodoru

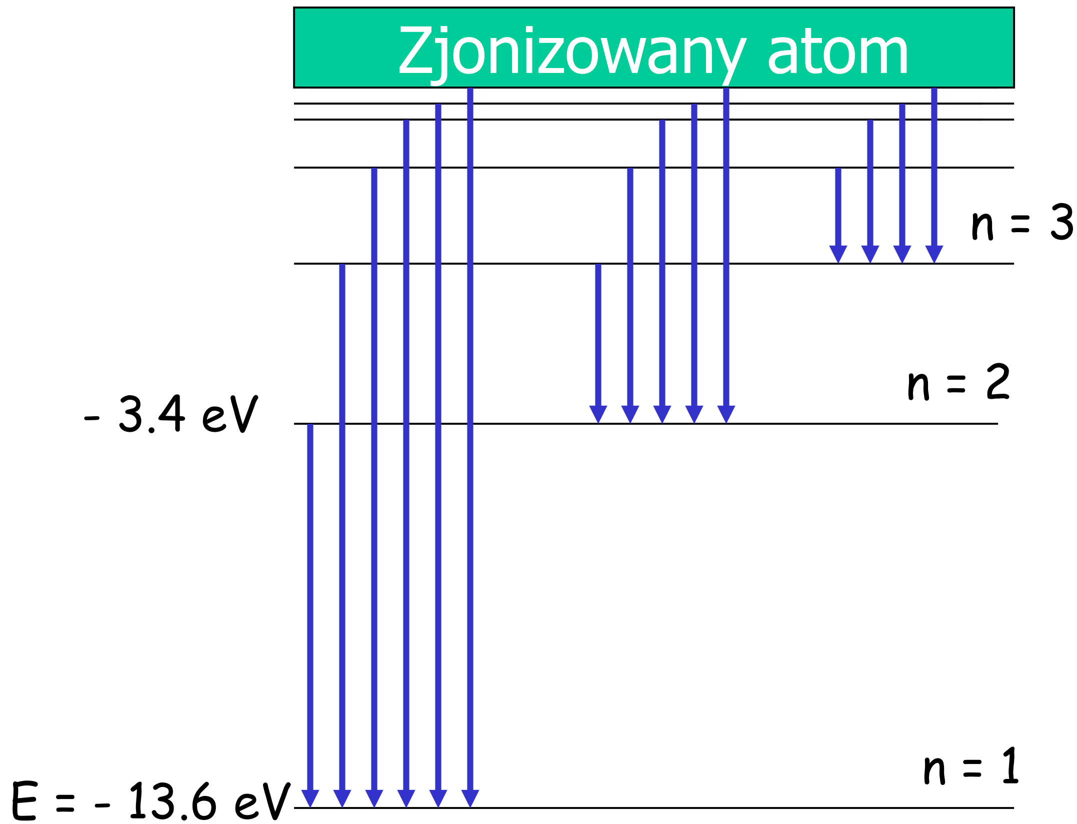
$$E_n = -13.6eV \cdot \frac{1}{n^2}$$

n- główna liczba kwantowa

n = 1,2,3,4,5,…;



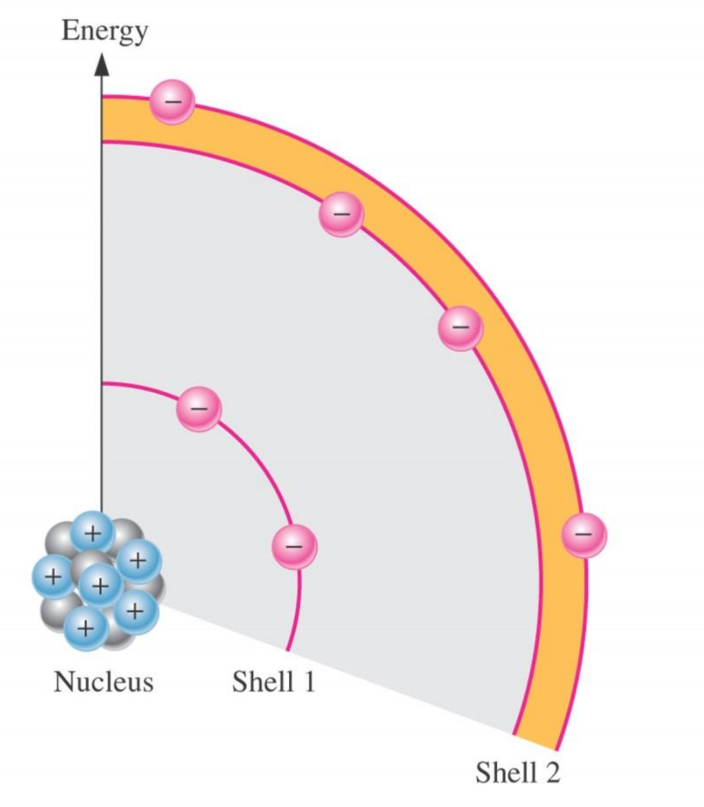
Widmo helu



Budowa atomu

Powłoki i orbity

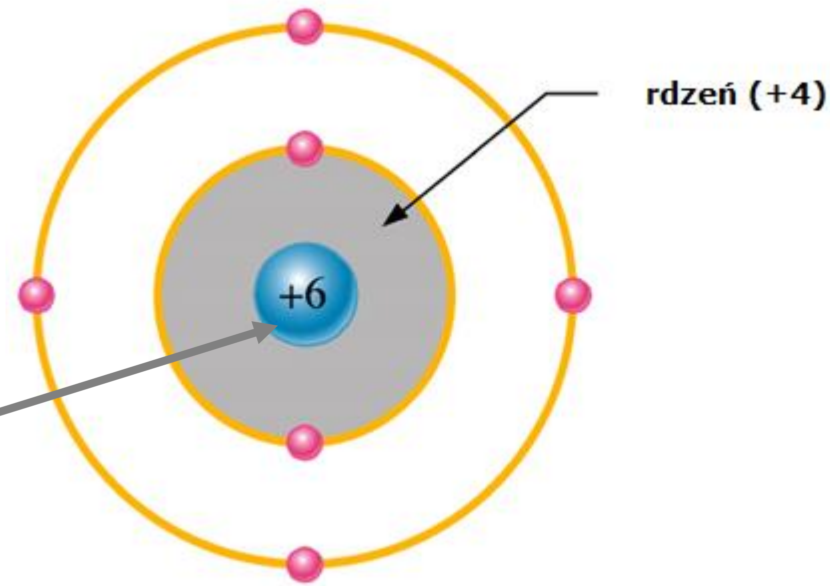
- Orbity grupują się w powłoki (ang. shells)
- Różnice energii pomiędzy poziomami w obrębie powłoki są << od różnic energii pomiędzy powłokami
- Energia elektronu rośnie ze wzrostem odległości od jądra



Budowa atomu

- **Atom może być przedstawiony jako powłoka walencyjna i rdzeń**
- **Rdzeń składa się z wewnętrznych powłok i jądra**

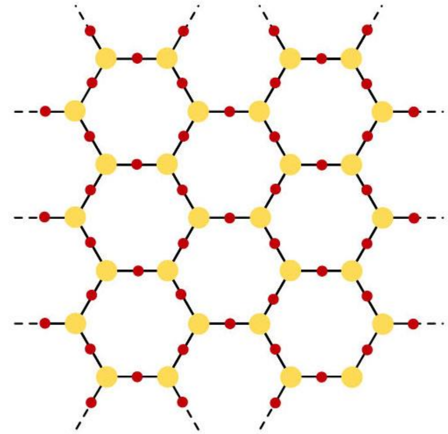
Atom węgla:
-powłoka walencyjna – 4 e
-wewnętrzna – 2 e
Jądro:
-6 protonów
-6 neutronów



- **O właściwościach atomu decydują elektrony walencyjne!**

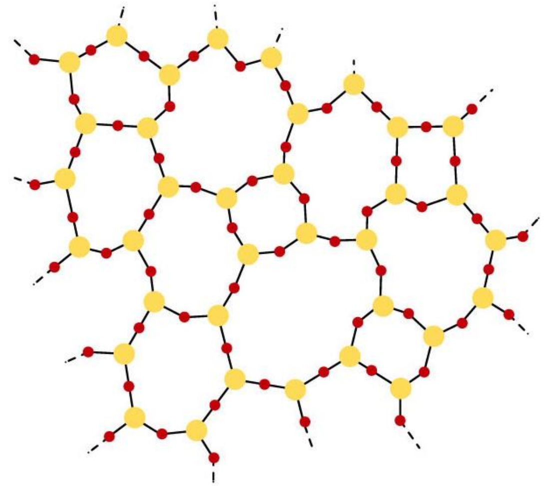
Kryształy

Struktura krystaliczna



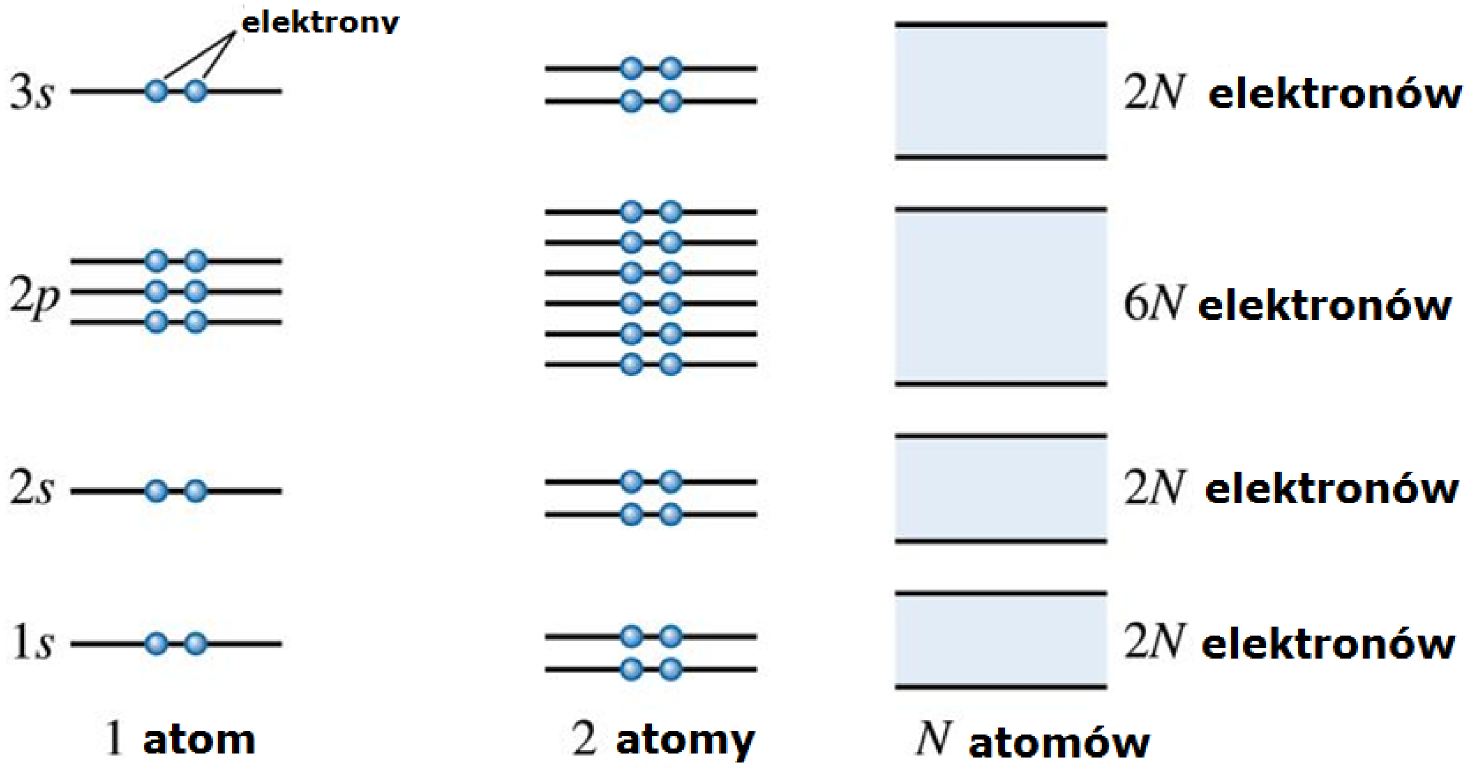
(a)

Struktura amorficzna



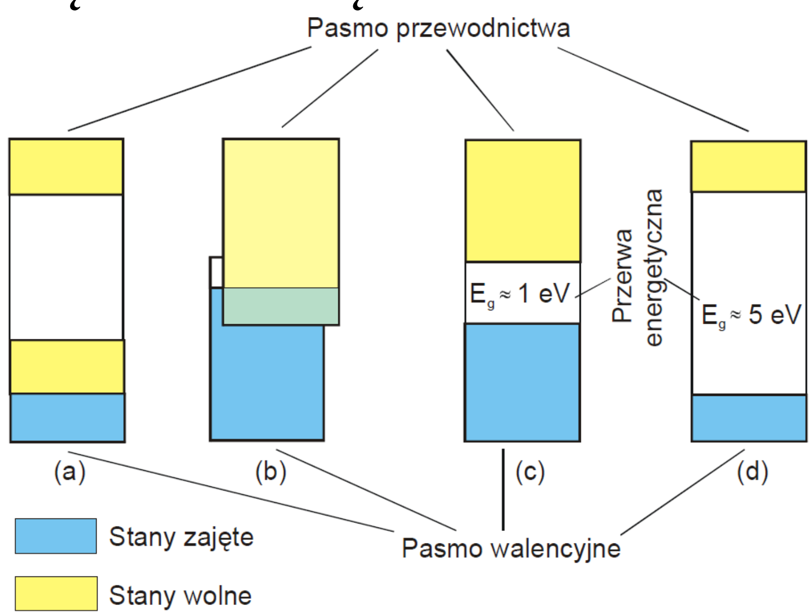
(b)

Rozszczepienie poziomów energet. w krysztale



Metale, izolatory, półprzewodniki

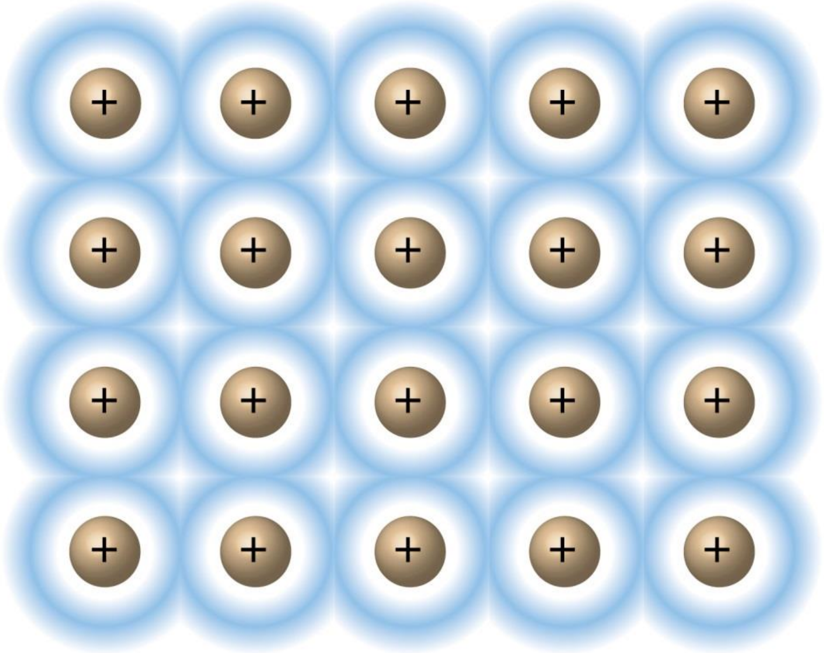
- **Zbliżenie atomów w krysztale prowadzi do rozszczepienia poziomów energetycznych. Istotnemu rozszczepieniu ulegają stany elektronów walencyjnych.**
- **Rozszczepione poziomy grupują się w pasma**
- **Najwyższe pasmo obsadzone elektronami w niemetalach nazywa się pasmem walencyjnym.**
- **Sąsiednie wyższe pasmo nazywa się pasmem przewodnictwa.**
- **Obszar energii zawartej pomiędzy pasmami, niedozwolony dla elektronów nazywa się przerwą wzbronioną.**



a) i b) - metale, c) półprzewodnik (przerwa wzbr. 1eV-umownie), d) izolator

Przewodniki

- **materiał przewodzący prąd elektryczny**
- **najlepsze przewodniki są jednoatomowe (Cu, Ag, Au, Al)**
- **jeden elektron walencyjny słabo związany z atomem – swobodny elektron**



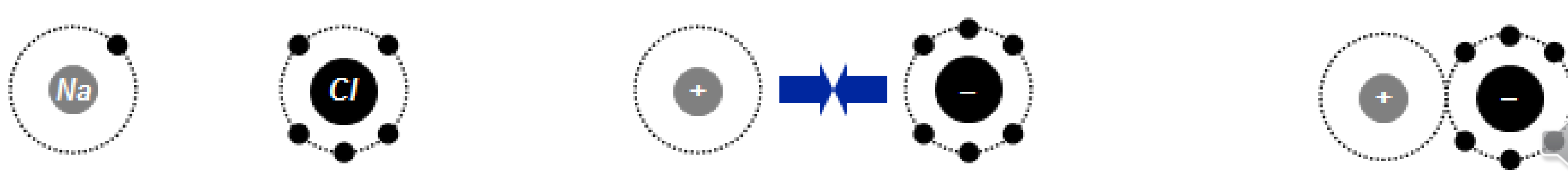
Półprzewodniki i izolatory

Półprzewodnik

- materiał, który przewodzi prąd elektryczny lepiej niż izolator i gorzej niż przewodnik
- powszechnie używane półprzewodniki: krzem(Si), german Ge)
- te półprzewodniki posiadają 4 elektrony walencyjne

Izolator

- materiał nie przewodzący prądu elektrycznego
- elektrony walencyjne są mocno związane z atomem, brak swobodnych elektronów, np. NaCl



Półprzewodniki, przewodniki i izolatory

Porównanie atomu półprzewodnika i przewodnika

Atom Si:

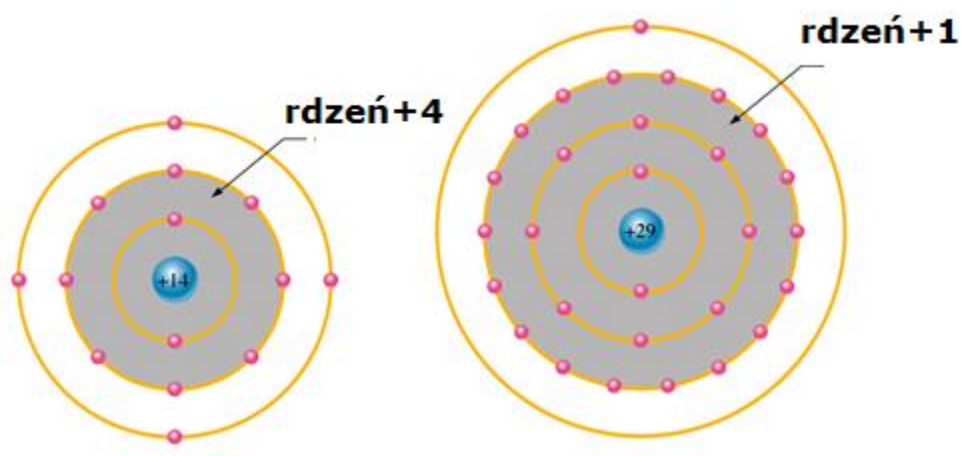
- 4 elektrony walencyjne
- półprzewodnik
- Konfiguracja elektronowa: 2:8:4

Atom Cu:

- Tylko 1 elektron walencyjny
- Dobry przewodnik
- Konfiguracja elektronowa:2:8:18:1

14 protonów
14 jąder

10 elektronów na powłokach wewnętrznych

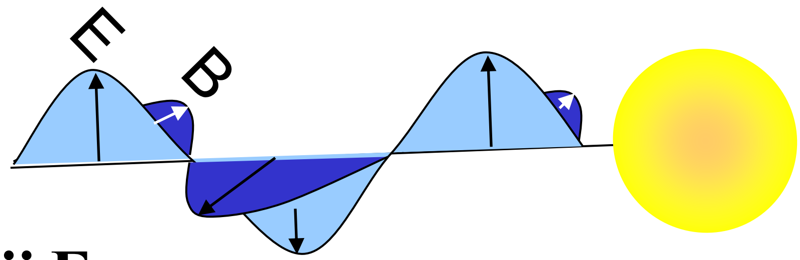


29 protonów
29 jąder

28 elektronów na powłokach wewnętrznych

Promieniowanie elektromagnetyczne

Dualizm korpuskularno-falowy światła



- **Fala elektromagnetyczna**
- **Strumień fotonów o energii E_F :**

$$\boxed{E_F = \frac{hc}{\lambda}}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 m/s$$

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} J \cdot s$$

Światło jest absorbowane przez półprzewodnik, gdy

$$E_F = \frac{hc}{\lambda} \geq E_g$$

E_g – przerwa wzbroniona, dla każdego półprzewodnika inna. Dla krzemu 1.1eV

Fale materii

■ Dualizm falowo-cząstkowy fali elektromagnetycznej.

- **W zjawiskach takich jak dyfrakcja czy interferencja fala elektromagnetyczna wykazuje typowe własności falowe.**
- **W zjawiskach takich jak promieniowanie rentgenowskie, efekt Comptona czy efekt fotoelektryczny fala elektromagnetyczna wykazuje naturę korpuskularną, tzn. jest strumieniem cząstek zwanych fotonami.**

■Hipoteza de Broglie'a .

W 1924 roku L. de Broglie założył, że dualizm cząstkowo - falowy jest własnością charakterystyczną nie tylko dla fali elektromagnetycznej, ale również dla cząstek o masie spoczynkowej różnej od zera .Oznacza to, że cząstki takie jak np. elektrony powinny również wykazywać własności falowe. Fale te nazwał on falami materii. Założył, że długość fal materii określona jest tym samym związkiem, który stosuje się do fotonów.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Zasada nieoznaczoności Heisenberga

- **Fizyka klasyczna**
  - **Dokładność pomiaru jest zdeterminowana jedynie jakością aparatury pomiarowej**
  - **Nie ma teoretycznych ograniczeń na dokładność z jaką mogą być wykonane pomiary**

- **Mechanika kwantowa**
  - **Obowiązuje zasada nieoznaczoności: pewnych wielkości fizycznych nie można zmierzyć równocześnie z dowolną dokładnością**

Zasada nieoznaczoności Heisenberga

- **Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru pędu i położenia:**

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar$$

- **Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru energii i czasu:**

$$\Delta E \Delta \tau \geq \hbar$$

Funkcja falowa

Zgodnie z hipotezą de Broglie'a, cząstki takie jak elektron czy proton, mają własności falowe.

Własności falowe cząstki (lub innego obiektu) w mechanice kwantowej opisuje tzw. funkcja falowa $\Psi(x,t)$, która :

- **Zawiera w sobie wszystkie informacje o obiekcie (np. cząstce).**
- **W ogólnym przypadku jest to funkcją zespoloną współrzędnych przestrzennych oraz czasu.**
- **Musi być funkcją ciągłą, a także musi mieć ciągłą pochodną.**
- **Kwadrat modułu funkcji falowej**

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

jest gęstością prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w chwili *t* w pewnym punkcie przestrzeni

$$p = |\Psi|^2 \Delta V \Rightarrow \int_V |\Psi^2| dV = 1$$

Równanie Schrödingera

Funkcję falową, Ψ dla danej cząstki, lub bardziej złożonego układu fizycznego, otrzymujemy rozwiązując równanie różniczkowe nazywane równaniem Schrödingera.

Jeżeli energia potencjalna cząstki U nie zależy od czasu, to równanie Schrödingera jest równaniem niezależnym od czasu i nazywa się stacjonarnym równaniem Schrödingera.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+U(x)\Psi(x)=E\Psi(x)$$

Cząstka swobodna

Cząstka swobodna - na cząstkę nie działają żadne pola. Energia potencjalna cząstki *U*(*x*)=0.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+U(x)\Psi(x)=E\Psi(x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}=E\Psi(x)$$

Szukamy rozwiązania w postaci Ψ(x)=A sin(*kx*)

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

$$\frac{d\Psi(x)}{dx}=Akcos(kx) \qquad \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}=-Ak^2\sin(kx)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-Ak^2\sin(kx))=EAsin(kx)$$

Funkcja ta będzie rozwiązaniem gdy:

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$$

Czyli energia cząstki swobodnej!

Liczba falowa

Zgodnie z hipotezą de Broglie'a $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k}$ $\Rightarrow$

$$p = \frac{hk}{2\pi} = \hbar k \Rightarrow$$

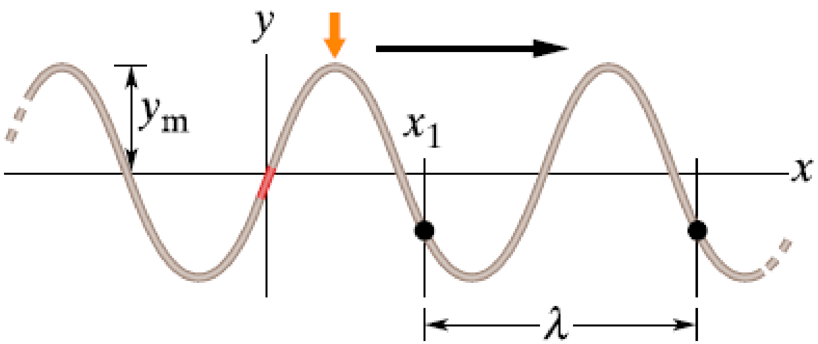
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} = E_{kinet}$$

Liczba falowa: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Długość fali i liczba falowa

Drganie harmoniczne: $y(t) = Asin(\omega t)$

Fala biegnąca w kierunku osi +x $y(x,t) = Asin(\omega t - kx)$



Długość fali - odległość λ pomiędzy punktami o tej samej fazie

$$y(x_1, 0) = Asin(-kx_1)$$

$$y(x_1 + \lambda, 0) = Asin(-kx_1 - k\lambda)$$

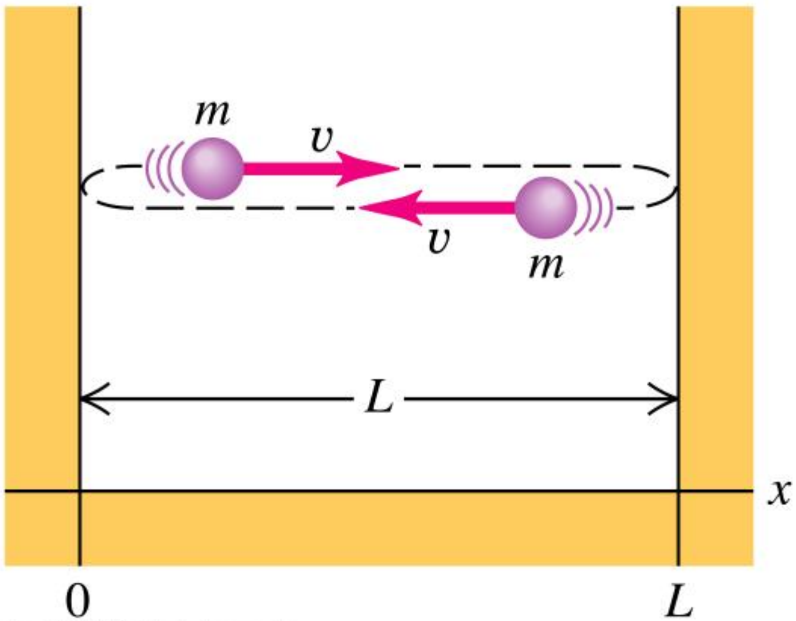
$$\mathbf{k\lambda = 2\pi}$$

$$\boxed{\mathbf{k = \frac{2\pi}{\lambda}}}$$

Wielkość $k = 2\pi/\lambda$ nazywa się liczbą falową.

Cząstka w studni potencjału

1. Przypadek klasyczny

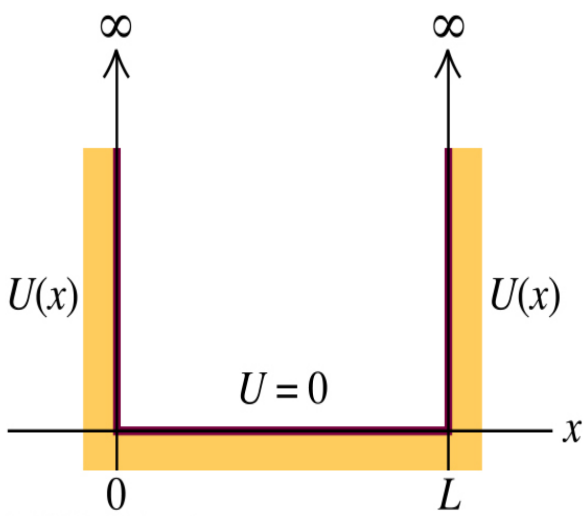


Znajdująca się w głębokiej studni piłka może posiadać dowolną energię kinetyczną.

W szczególnym przypadku gdy znajduje się w spoczynku na dnie studni posiada energię całkowitą równą zeru .

Cząstka w studni potencjału

2. Przypadek kwantowy



Energia potencjalna

$$U(x) = \begin{cases} \infty \quad dla \ x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty) \\ 0 \quad dla \ x \in (0, L) \end{cases}$$

Warunki brzegowe:

$$|\Psi(0)|^2 = |\Psi(L)|^2 = 0$$

Równanie Schrödingera: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$

Cząstka w studni potencjału

W obszarze studni $x \in (0, L)$ **cząstka jest cząstką swobodną.**
Szukamy więc rozwiązania w postaci:

$$\Psi(x) = A \sin(kx + \alpha)$$

- **Warunek brzegowy dla *x*=0:** $|\Psi(0)|^2 = |A|^2 [\sin(k \cdot 0 + \alpha)]^2 = 0$

spełniony jest jedynie gdy α=0 .

- **Warunek brzegowy dla *x*= L :** $|\Psi(L)|^2 = |A|^2 [\sin(k \cdot L)]^2 = 0$

spełniony jest jedynie gdy $kL=n\pi$. Stąd:

$$k = \frac{n\pi}{L} \qquad \textbf{oraz} \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad \textbf{skąd} \qquad E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

Cząstka w studni potencjału

Pytanie: czy *n* może być równe zeru?

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2 \qquad \Psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Dla $n = 0$, $E_n = 0$ oraz $\Psi_0(x) = A\sin(0 \cdot x) = 0$

Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w tym obszarze w stanie o $n = 0$ jest równe 0;

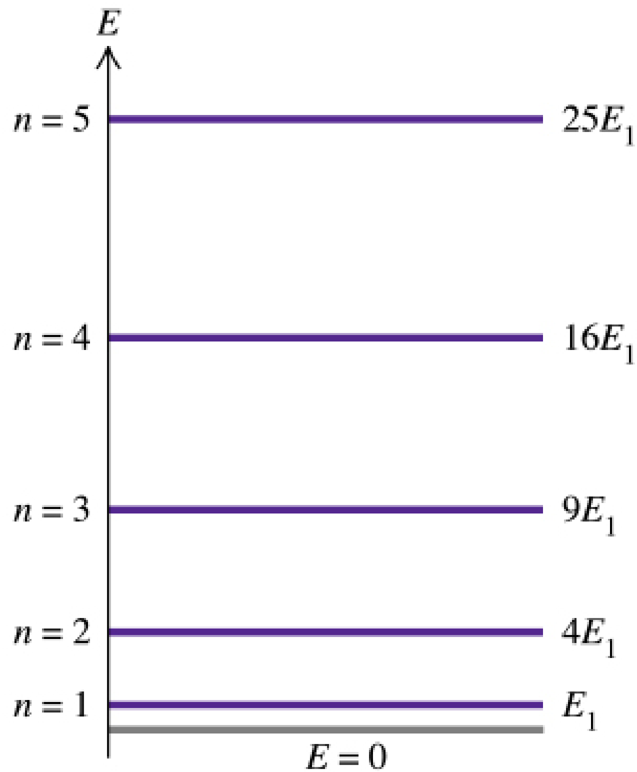
Wniosek: najmniejsza wartość *n*=1. Cząstka musi mieć energię różną od zera. Najmniejsza energia:

$$\boxed{E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}1^2}$$

Cząstka w studni potencjału - podsumowanie

W nieskończonej studni potencjału energia cząstki może przyjmować tylko pewne ściśle określone, różne od zera wartości:

$$\boxed{E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2 \qquad \textbf{gdzie } n = 1, 2, 3, \dots}$$

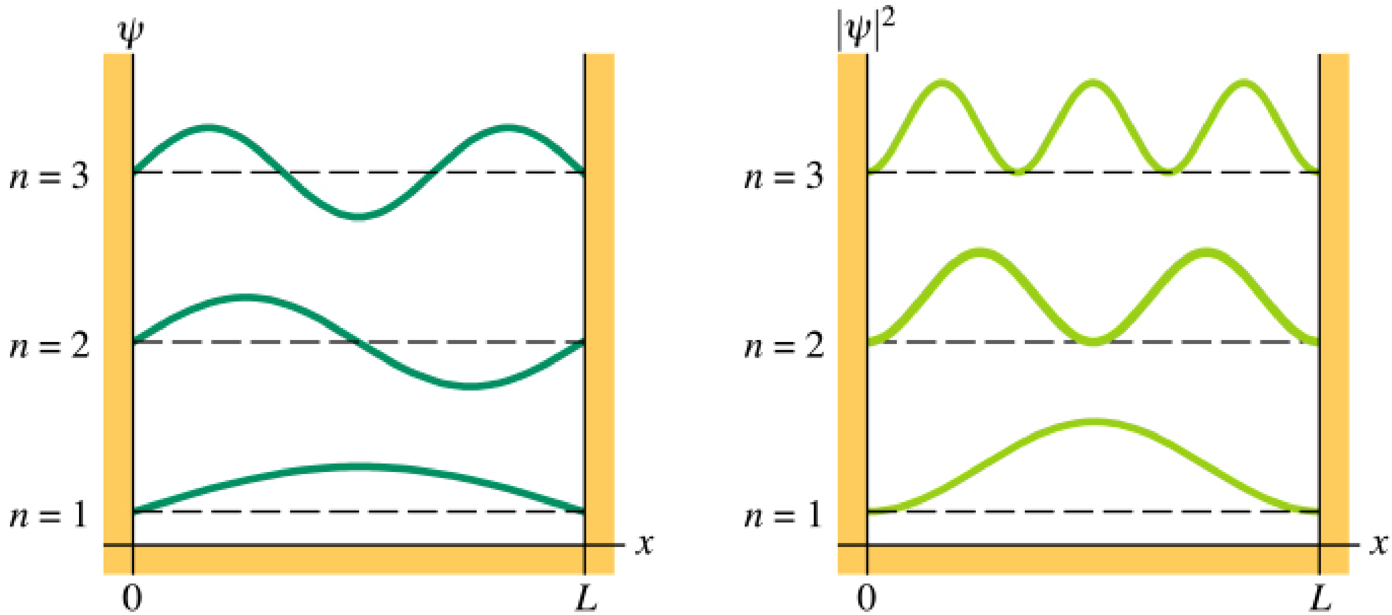


Cząstka w studni potencjału - podsumowanie

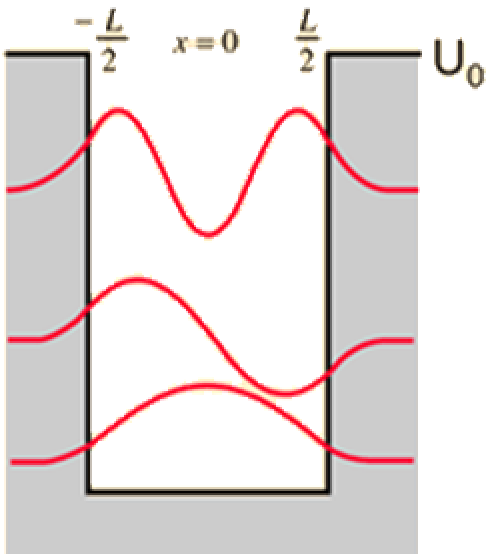
$$\int_0^L |\Psi_n(x)|^2\, dx = A^2 \underbrace{\int_0^L sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx}_{L/2} = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

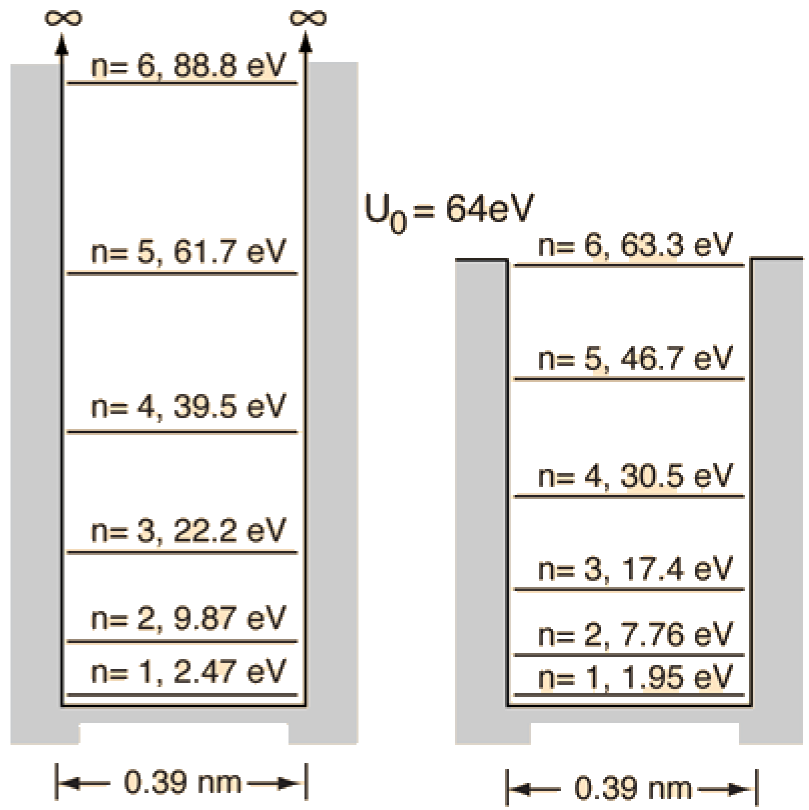
$\Rightarrow$ **funkcja falowa :** $$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Wewnątrz studni powstaje fala stojąca materii z węzłami na brzegach studni.



Skończona studnia potencjału



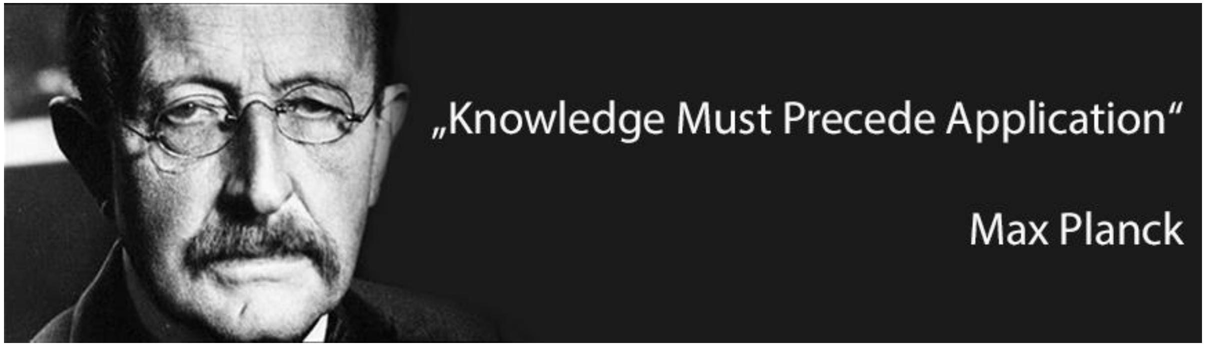


W skończonej studni potencjału energia elektronu też jest skwantowana, ale funkcja falowa wnika w barierę potencjału

Kwantowanie energii

- **Energia dowolnego obiektu jest skwantowana. Obiekt znajduje się na jednym z dozwolonych poziomów energetycznych**
- **Zmiana energii układu może odbywać się wyłącznie porcjami - *kwantami***
- **W makroświecie odległość pomiędzy najbliższymi poziomami energetycznymi jest niemierzalnie mała**

Prawo Plancka



Wiedza musi poprzedzać aplikację

Postulat Plancka (1900r – narodziny mechaniki kwantowej):

$$\boxed{\varepsilon_n = nh\nu \qquad n = 1,2,3\ldots}$$

Stała Plancka $\boldsymbol{h = 6.63 \cdot 10^{-34} Js}$