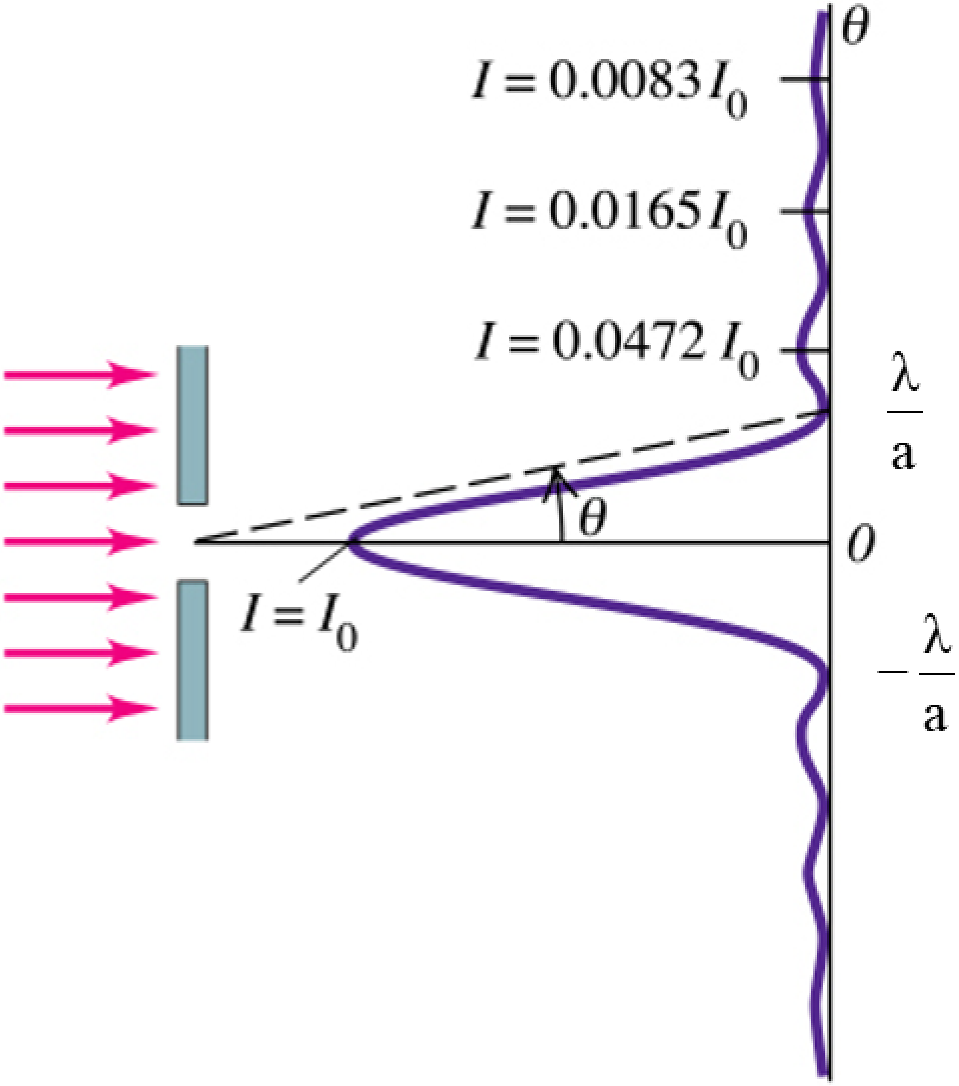
Wykład III

1. Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie
i na siatce dyfrakcyjnej
2. Fale Materii
3. Relacja nieoznaczoności Heisenberga
4. Funkcja falowa
5. Równanie Schrödingera
6. Cząstka w studni potencjału

Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

$$I = I_{max} \cdot \left(\frac{\sin\left((\pi a \sin\theta)/\lambda\right)}{(\pi a \sin\theta)/\lambda} \right)^2$$



(a)

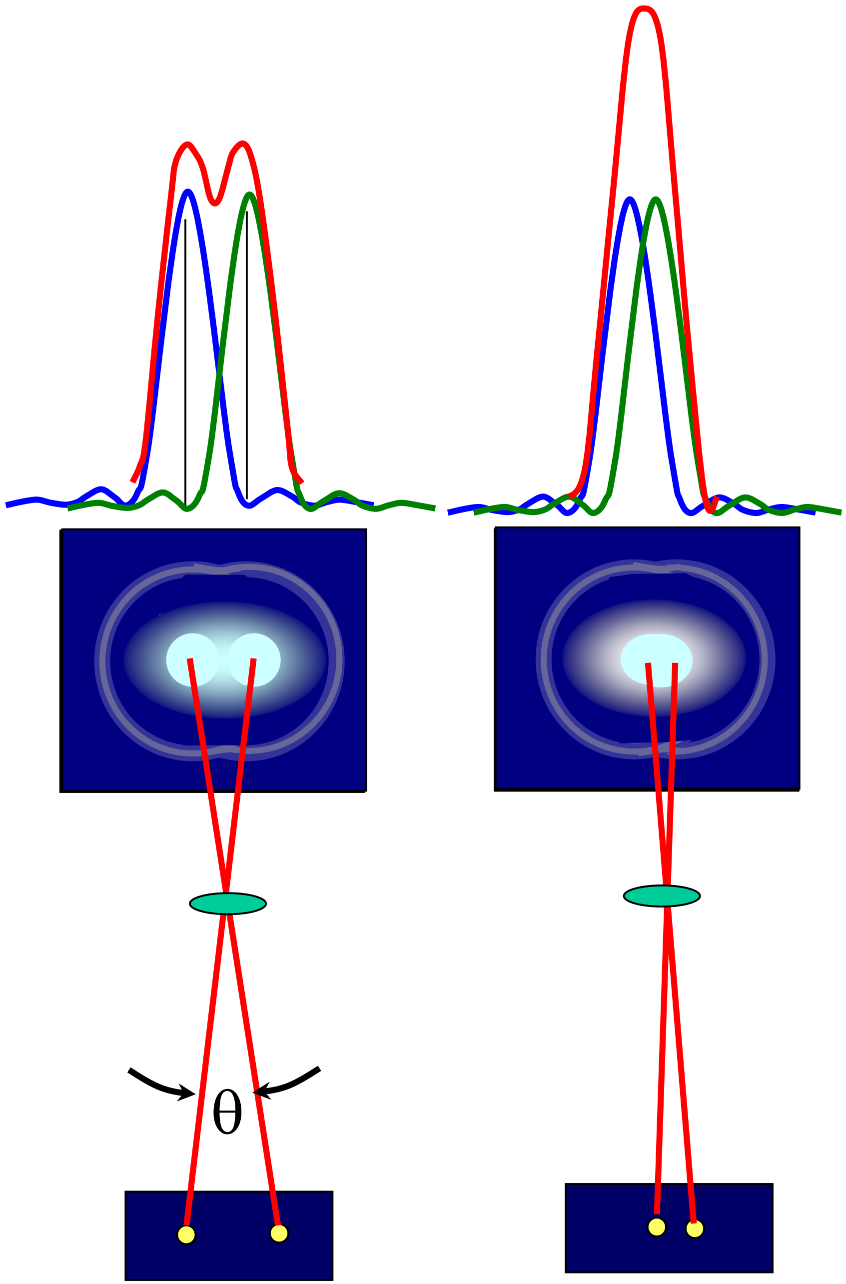
Warunek na minima:

$$\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = n\pi$$

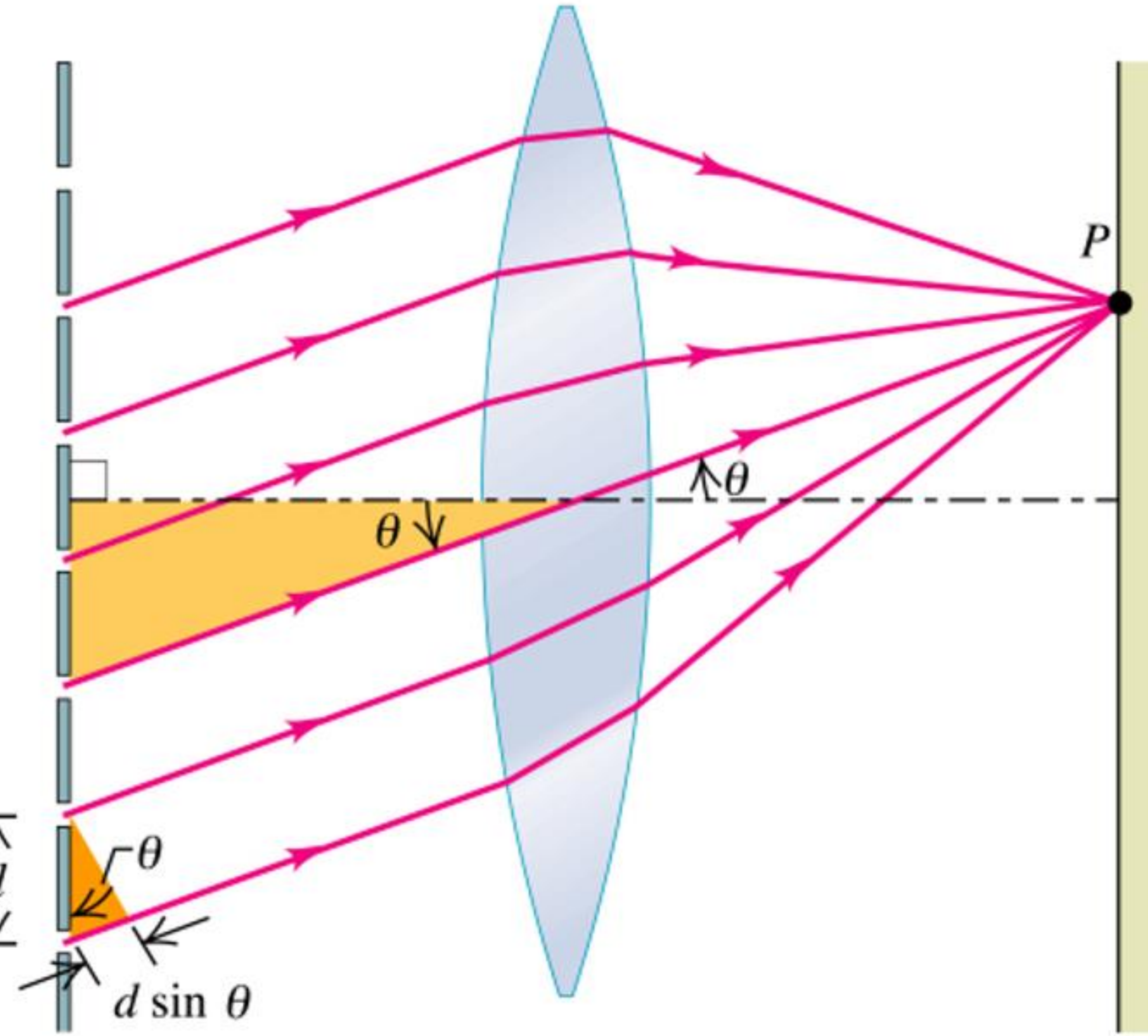
$$\boxed{\sin\theta = \frac{n\lambda}{a}}$$

Kryterium Rayleigh'a

Jeśli położenie centralnego maksimum jednego obrazu dyfrakcyjnego przypada na położenie pierwszego minimum drugiego obrazu, to obrazy te są rozróżnialne.



Wiele szczelin – siatka dyfrakcyjna



Maksima

$$d\sin\theta = n\lambda$$

d – odległość między szczelinami

Fale materii

■ Dualizm falowo-cząstkowy fali elektromagnetycznej.

- W zjawiskach takich jak dyfrakcja czy interferencja fala elektromagnetyczna wykazuje typowe własności falowe.

- W zjawiskach takich jak efekt Comptona czy efekt fotoelektryczny fala elektromagnetyczna wykazuje naturę korpuskularną, tzn. jest strumieniem cząstek zwanych **fotonami**.

■ Hipoteza de Broglie'a .

- W 1924 roku L. de Broglie założył, że dualizm cząstkowo - falowy jest własnością charakterystyczną nie tylko dla fali elektromagnetycznej, ale również dla cząstek o masie spoczynkowej różnej od zera .Oznacza to, że cząstki takie jak np. elektrony powinny również wykazywać własności falowe. Fale te nazwał on **falami materii.** Założył, że długość fal materii określona jest tym samym związkiem, który stosuje się do fotonów.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Fale materii

Elektron

- Masa = 9.11 x 10^{-31} kg   prędkość = 10^{6} m / s

$$\lambda = \frac{6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}}{(9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg})(10^{6}\ \mathrm{m/s})} = 7.28\times10^{-10}\,\mathrm{m}$$

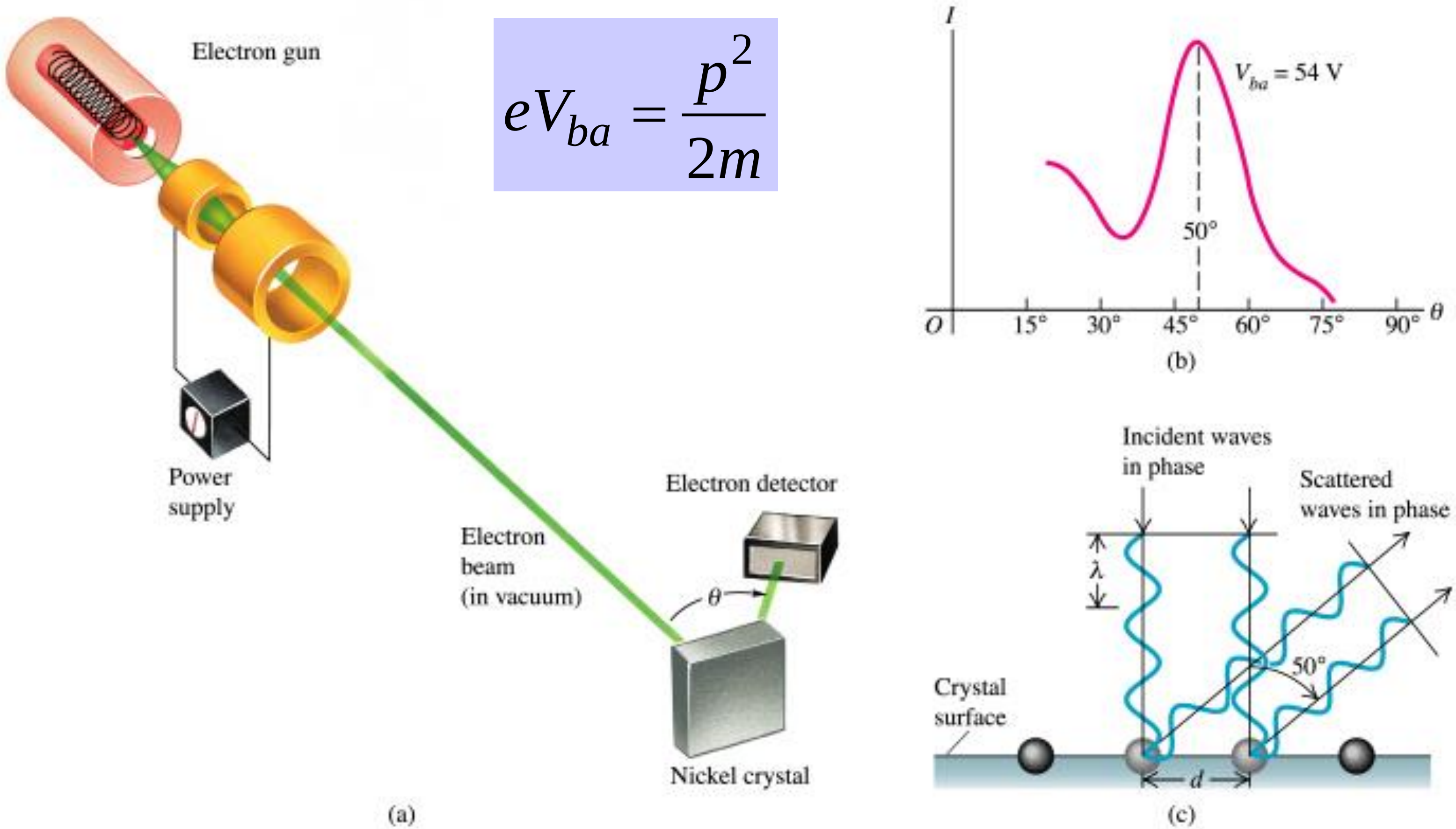
Piłka

- Masa = 1 kg   prędkość = 1 m / s

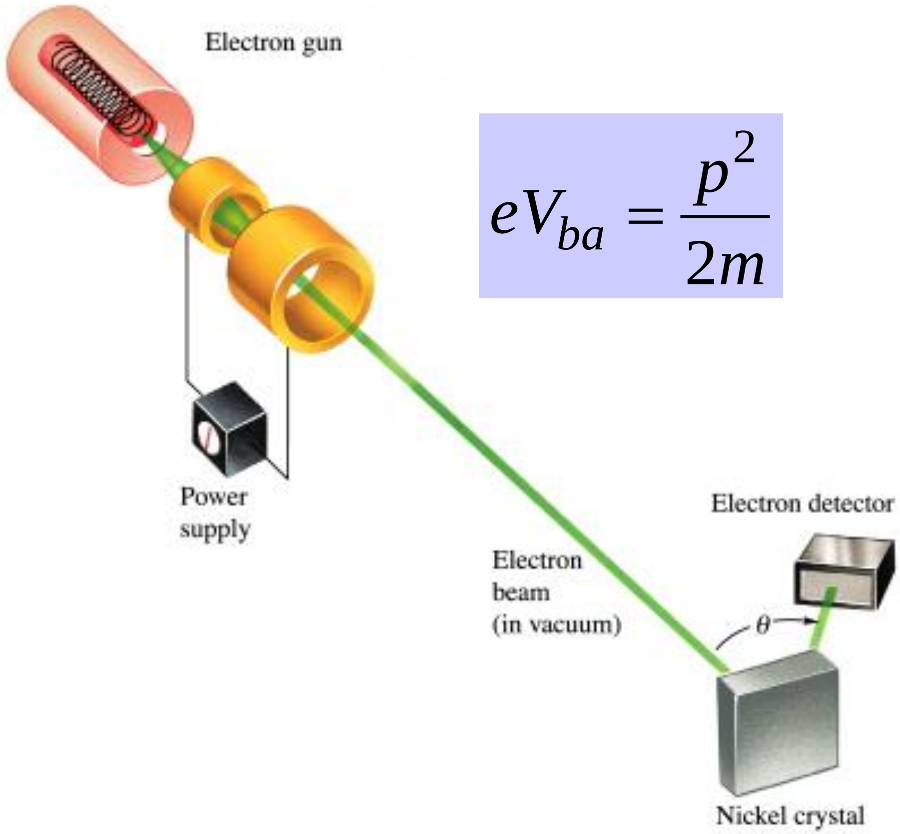
$$\lambda = \frac{6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot sec}}{(1\,\mathrm{kg})(1\,\mathrm{m/sec})} = 6.63\times10^{-34}\,\mathrm{m}$$

Doświadczenie C.J.Davissona i L.G.Germera

$$eV_{ba} = \frac{p^2}{2m}$$

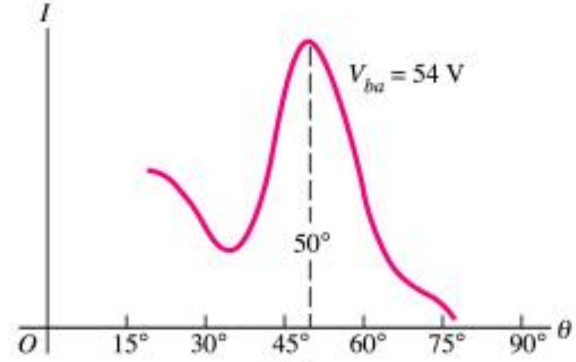


Doświadczenie C.J.Davissona i L.G.Germera

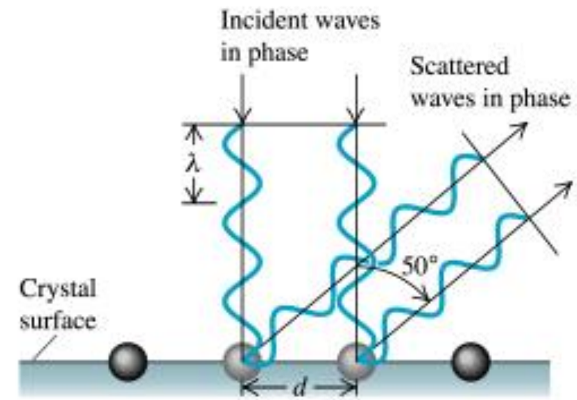


(a)

$$eV_{ba} = \frac{p^2}{2m}$$



(b)



(c)

Wzór de Broglie'a

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{ba}}} = 0.167\text{nm}$$

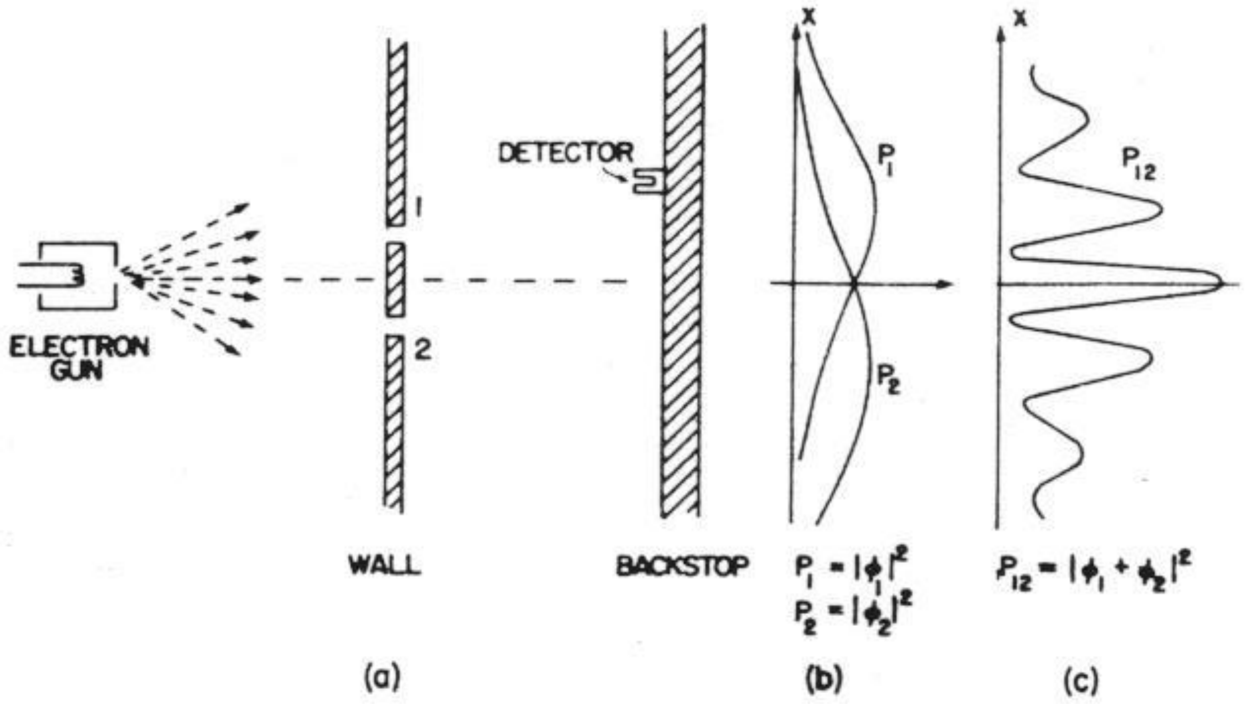
Z dyfrakcji

$$d_{\mathrm{Ni}} = 0.215\text{nm}$$

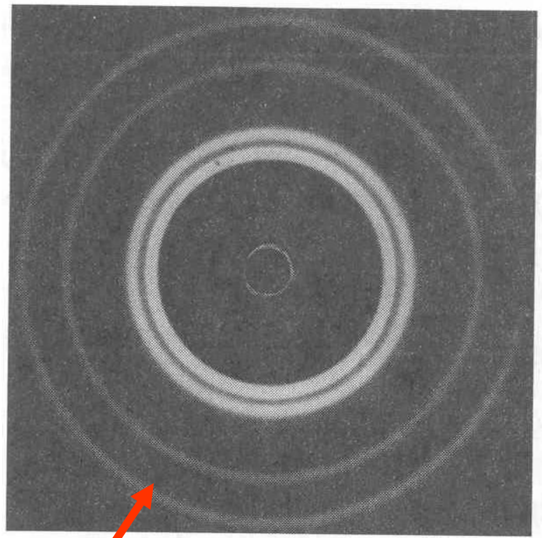
$$\lambda = d \sin\theta = 0.165\text{nm}$$

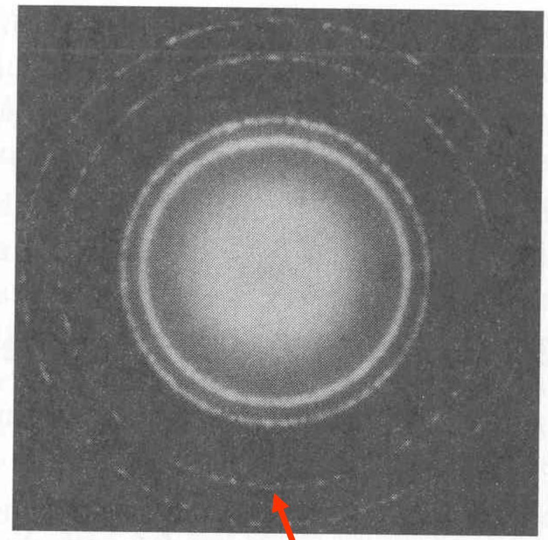
Dyfrakcja elektronów

Czy elektron przechodzi równocześnie przez dwie szczeliny ?



Dyfrakcja na polikrystalicznej folii aluminiowej

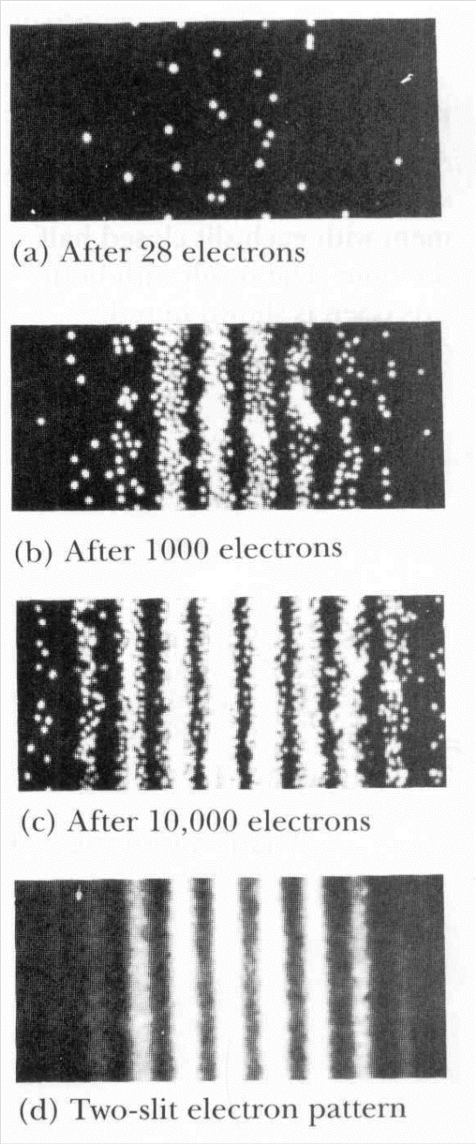


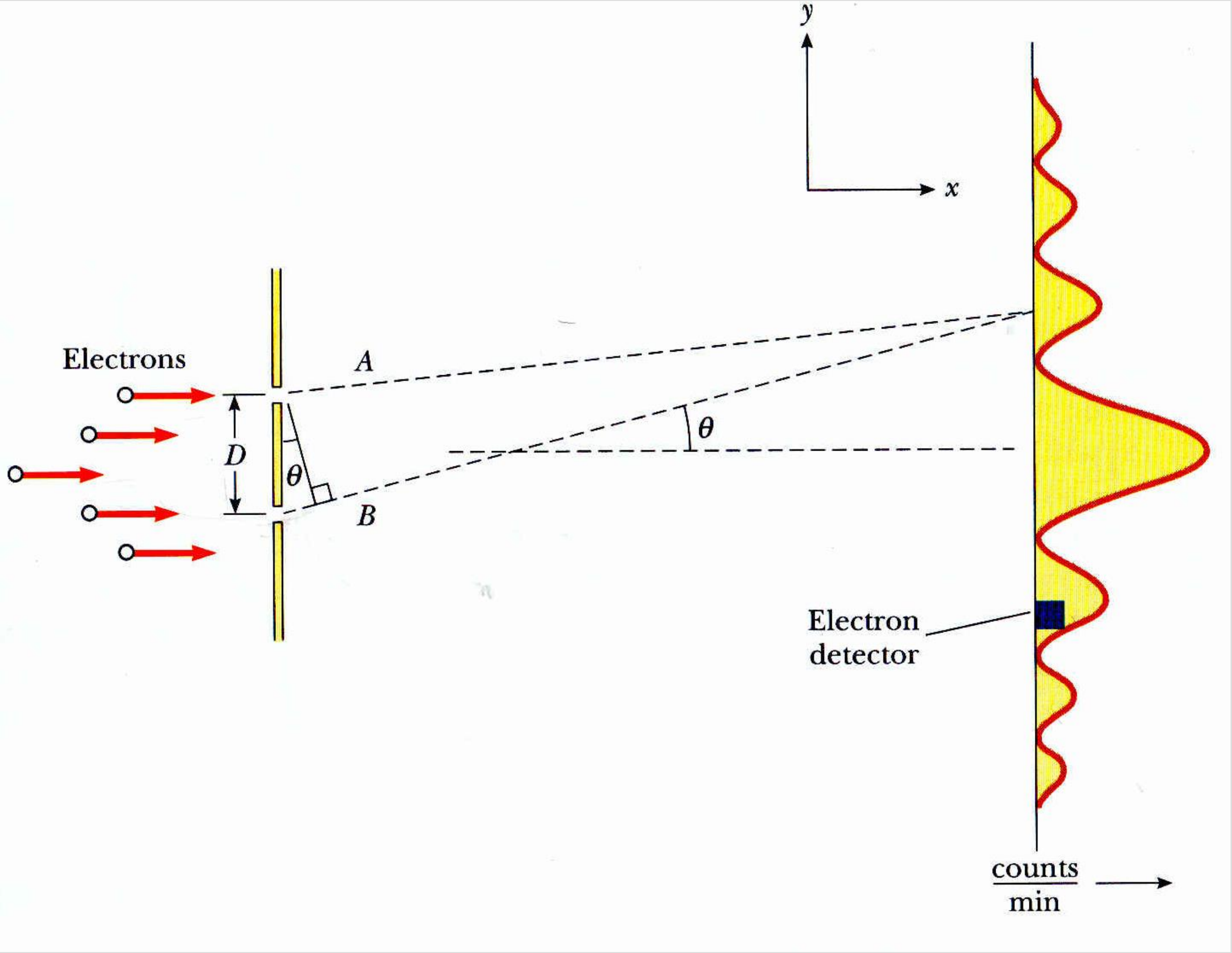


Dyfrakcja promieniowania X

Dyfrakcja elektronów

Dyfrakcja elektronów

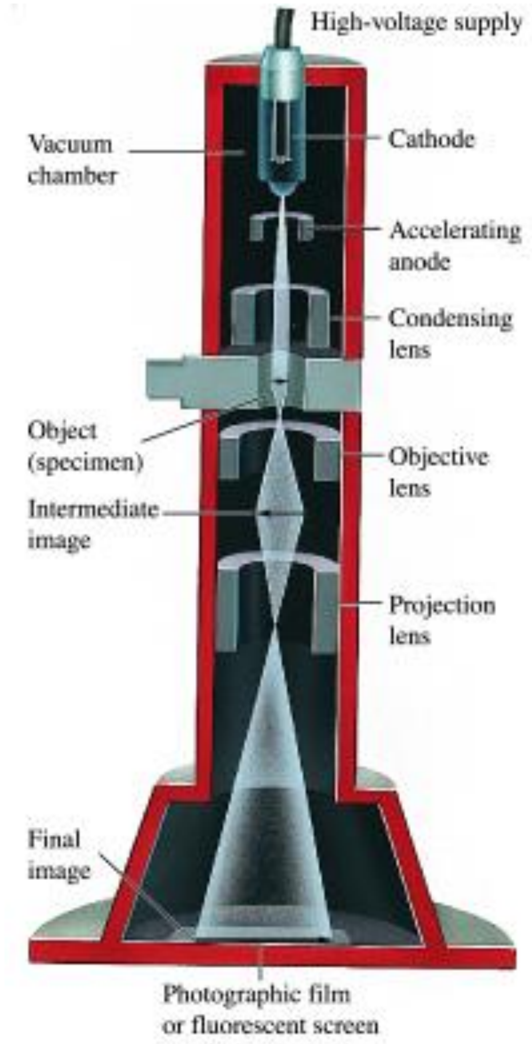




a, b, c - symulacje komputerowe

d - eksperymentalny obraz dyfrakcyjny

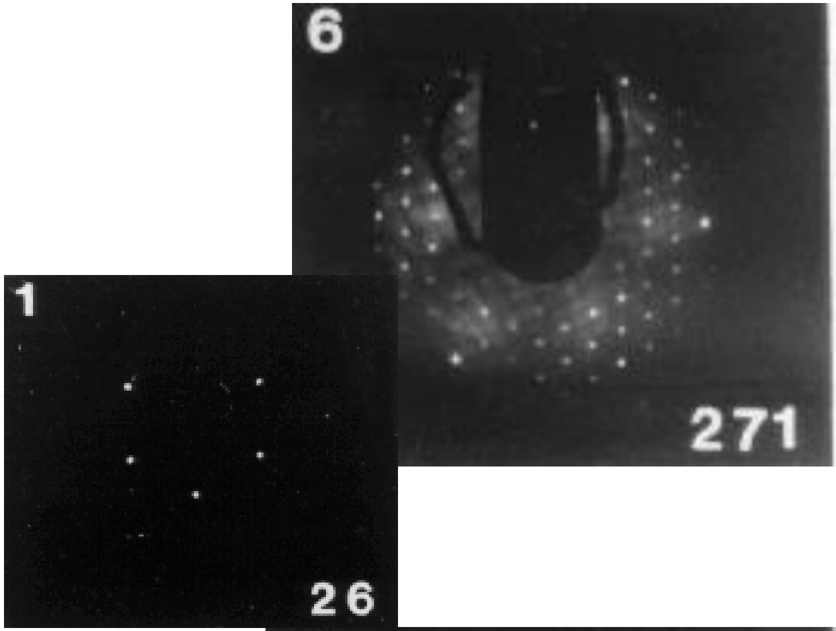
Mikroskop elektronowy

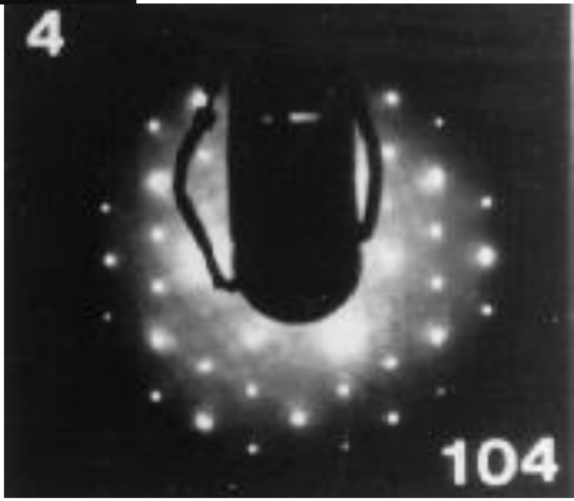


(a)

Dyfrakcja elektronów

Elektronom o energii 20eV odpowiada długość fali de Brogliea’ 0,27nm.
To odległość, która odpowiada odległościom między atomami sieci krystalicznej.



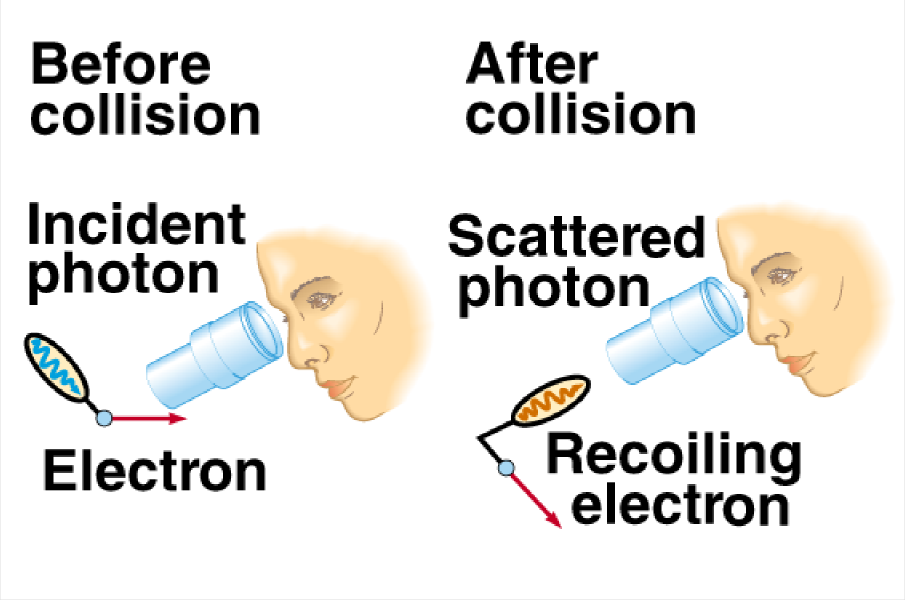


http://www.chem.qmw.ac.uk/surfaces/scc/scat6_2.htm

Zasada komplementarności

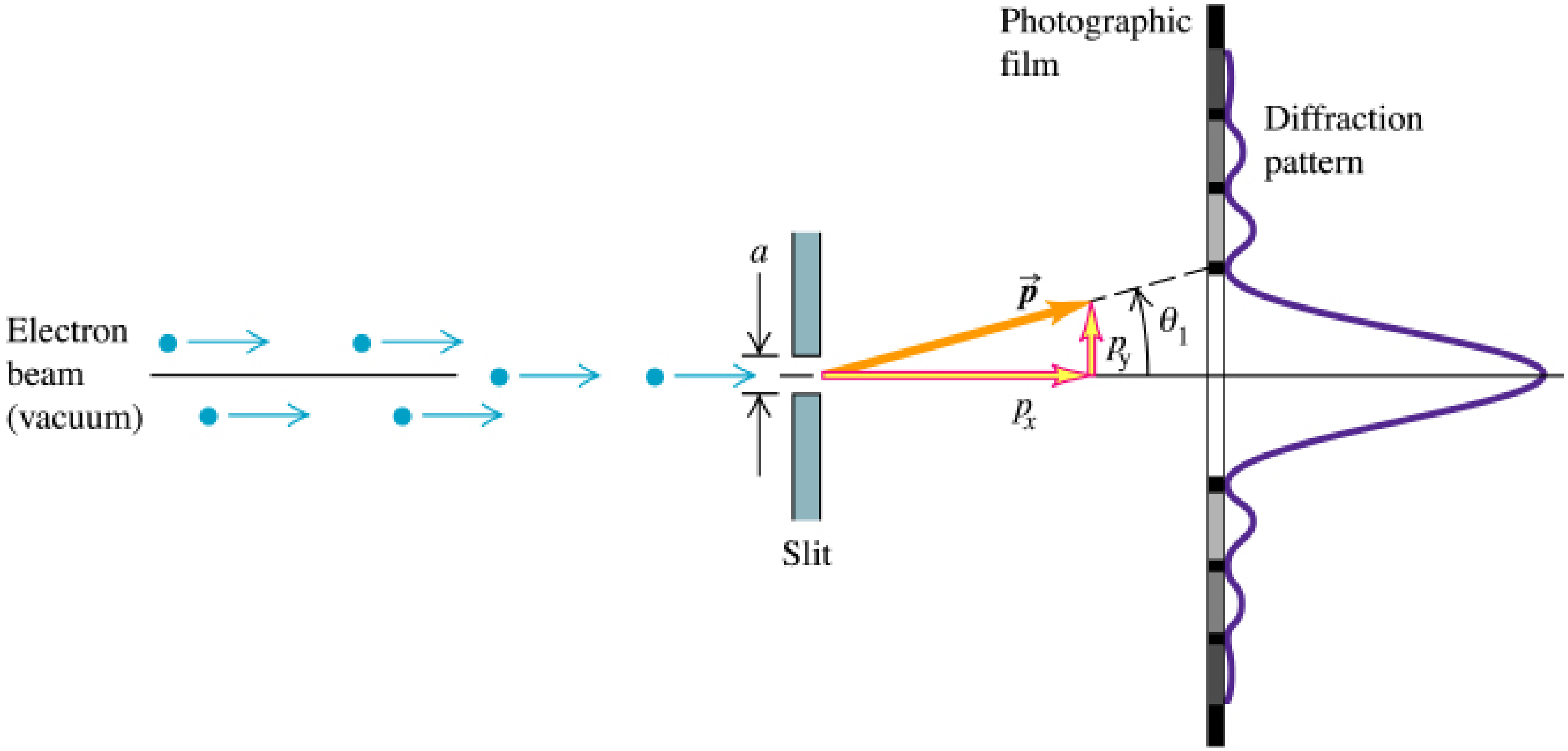
Fotony czy też elektrony oraz obiekty mikroświata w jednych zjawiskach mogą zachowywać się jak fala, a w innych jak cząstka tzn. wykazują zarówno własności falowe jak i korpuskularne. Obie te cechy uzupełniają się wzajemnie , dając pełny opis danego obiektu.

Zasada nieoznaczoności - interpretacja



Proces pomiaru zaburza stan układu

Zasada nieoznaczoności



$$a\sin\Theta_1 = \lambda \qquad \Theta_1 \cong \frac{\lambda}{a} \qquad p_y = p_x \tan\Theta_1 \cong p_x\Theta_1$$

$$p_y = p_x \frac{\lambda}{a} \qquad (p_y)_{śr} = 0 \qquad \Delta p_y \geq p_y = p_x \frac{\lambda}{a} = p_x \frac{h}{p_x a} = \frac{h}{a}$$

$$\boxed{\Delta p_y a \geq h}$$

Zasada nieoznaczoności

- Fizyka klasyczna
  - dokładność pomiaru jest zdeterminowana jedynie jakością aparatury pomiarowej
  - Nie ma teoretycznych ograniczeń na dokładność z jaką mogą być wykonane pomiary
- Mechanika kwantowa
  - Obowiązuje zasada nieoznaczoności: pewnych wielkości fizycznych nie można zmierzyć równocześnie z dowolną dokładnością

Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru pędu i położenia:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar / 2$$

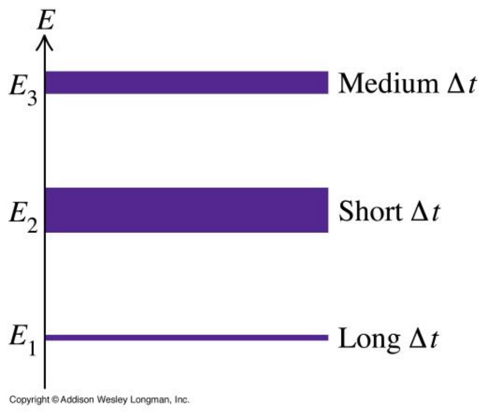
Przykład. Pęd poruszającego się z prędkością v=5000m/s elektronu zmierzono z dokładnością ±0.003%. Z jaką maksymalną dokładnością można było wyznaczyć położenie tego elektronu?

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p} = 3.8 \cdot 10^{-4} m$$

Zasada nieoznaczoności energii

Zasada nieoznaczoności dla równoczesnego pomiaru energii i czasu:

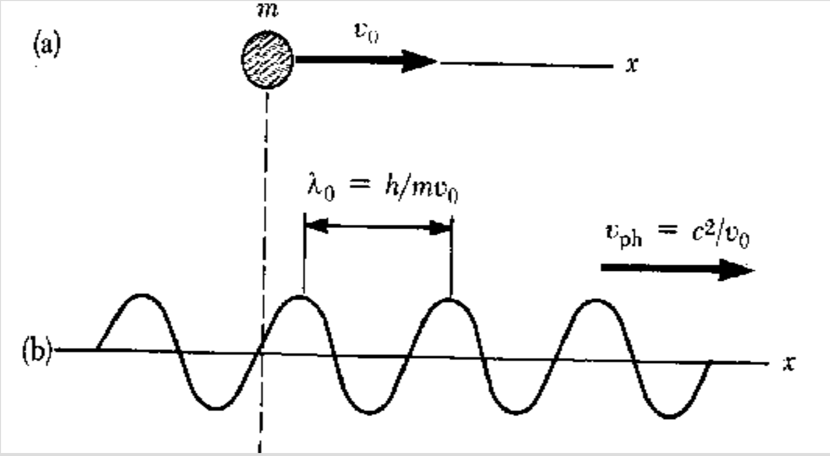
$$\Delta E \Delta \tau \geq \hbar / 2$$

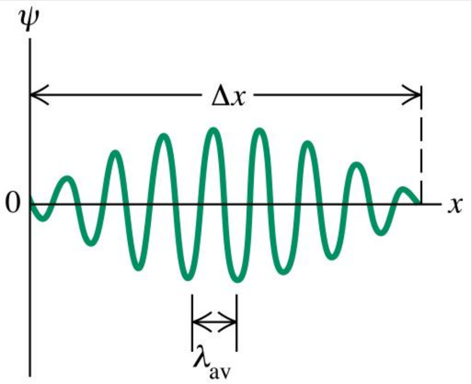


Przykład: Czas przebywania atomu sodu w stanie wzbudzonym zmierzono z dokładnością $\Delta t = 1.6 \cdot 10^{-8}$ s. Z jaką maksymalną dokładnością można było wyznaczyć wartość energii tego stanu?

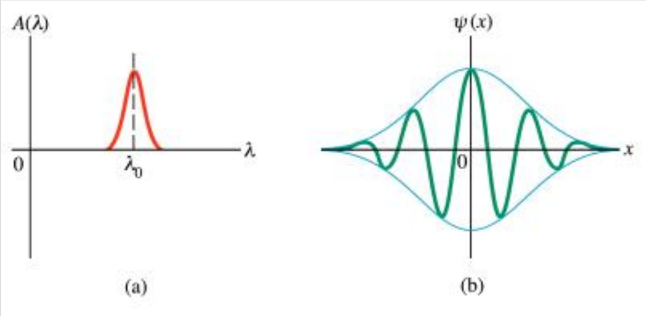
$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx 2 \cdot 10^{-8} eV$$

Cząstka czy fala?

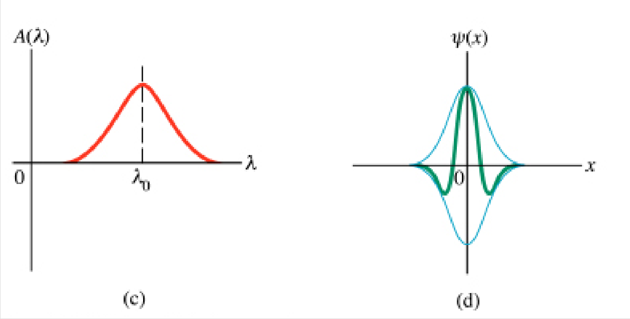




$$\Psi(x) = \int_0^\infty A(\lambda) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} d\lambda$$



$$\lambda = \frac{h}{p}$$



$\Delta\lambda$ małe $\longrightarrow$ Δp_x małe i Δx duże

$\Delta\lambda$ duże $\longrightarrow$ Δp_x duże i Δx małe

Funkcja falowa

Zgodnie z hipotezą de Broglie'a, cząstki takie jak elektron czy proton, mają własności falowe.

Własności falowe cząstki (lub innego obiektu) w mechanice kwantowej opisuje tzw. funkcja falowa $\Psi(x,t)$:

- zawiera w sobie wszystkie informacje o obiekcie (np. cząstce)
- w ogólnym przypadku jest to funkcja zespolona współrzędnych przestrzennych oraz czasu
- musi być funkcją ciągłą , a także musi mieć ciągłą pochodną
- kwadrat modułu funkcji falowej

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

jest **gęstością prawdopodobieństwa** znalezienia cząstki w chwili *t* w pewnym punkcie przestrzeni

$$p = |\Psi|^2 \Delta V \Rightarrow \int_V |\Psi^2| dV = 1$$

Równanie Schrödingera

Funkcję falową, Ψ dla danej cząstki, lub bardziej złożonego układu fizycznego, otrzymujemy rozwiązując równanie różniczkowe nazywane równaniem Schroedingera. Jeżeli energia potencjalna cząstki U nie zależy od czasu, to równanie Schrödingera jest równaniem niezależnym od czasu i nazywa się **stacjonarnym równaniem Schrödingera**.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+U(x)\Psi(x)=E\Psi(x)$$

Cząstka swobodna

Cząstka swobodna - na cząstkę nie działają żadne pola.
Energia potencjalna cząstki $U(x)$=0.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x)$$

Szukamy rozwiązania w postaci Ψ(x)=A sin(kx)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}A(-k^2\sin(kx) = EA\sin(kx)$$

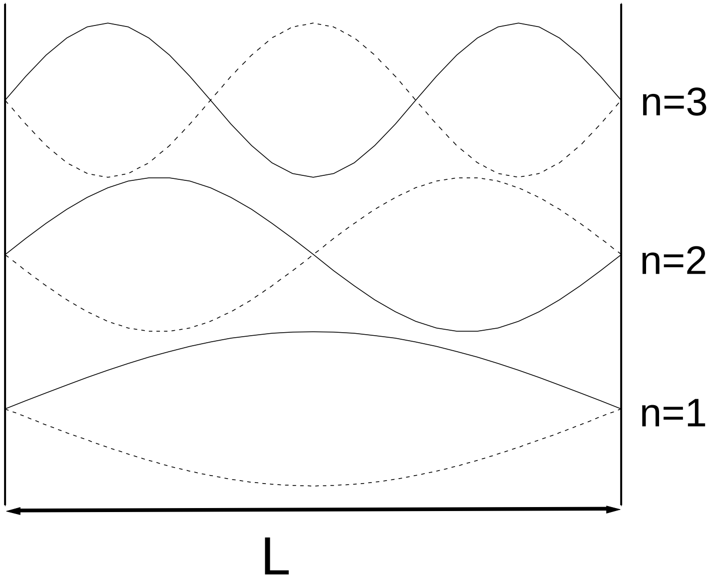
Funkcja ta będzie rozwiązaniem gdy:

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Drgająca struna

Fala stojąca powstaje gdy jest spełniony warunek:

$$L = n\frac{\lambda}{2} \qquad \lambda = \frac{2L}{n}$$



Długość fali stojącej jest skwantowana.

Falę stojącą opisuje równanie:

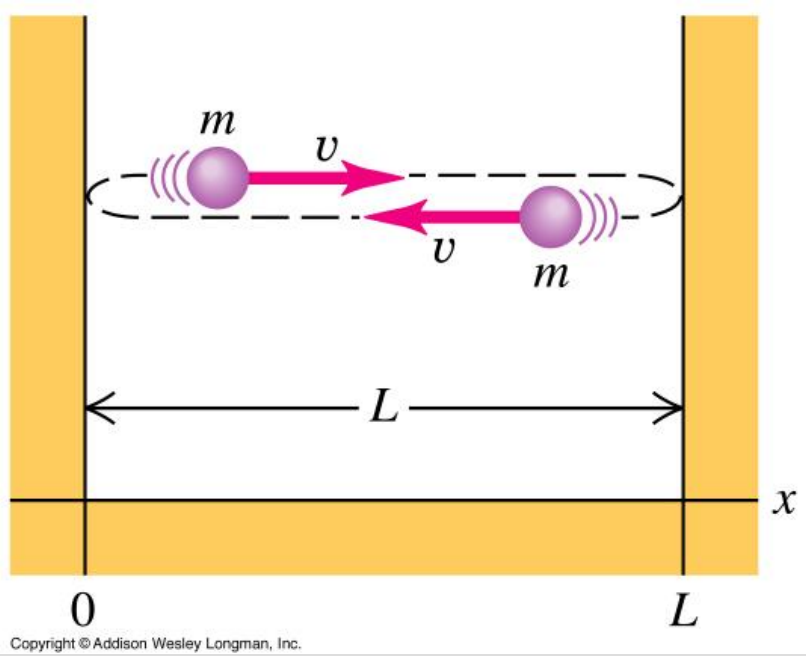
$$y(x) = A\sin(kx)$$

Podstawiając $\boldsymbol{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{2L/n} = \frac{\pi n}{L}}$ **otrzymujemy**:

$$y(x) = A\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Cząstka w studni potencjału

1. Przypadek klasyczny

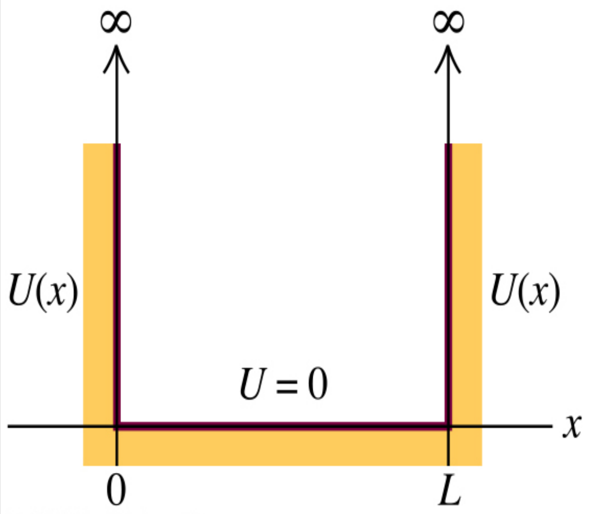


Znajdująca się w głębokiej studni piłka może posiadać dowolną energię kinetyczną.

W szczególnym przypadku gdy znajduje się w spoczynku na dnie studni posiada energię całkowitą równą zeru .

Cząstka w studni potencjału

2. Przypadek kwantowy



Energia potencjalna

$$U(x) = \begin{cases} \infty & dla \ x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty) \\ 0 & dla \ x \in (0, L) \end{cases}$$

Warunki brzegowe: $|\Psi(0)|^2 = |\Psi(L)|^2 = 0$

Równanie Schroedingera:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$$

Cząstka w studni potencjału

W obszarze studni $x \in (0, L)$ cząstka jest cząstką swobodną.
Szukamy więc rozwiązania w postaci $\Psi(x)=A \sin(kx+\alpha)$.

Warunek brzegowy dla $x=0$: $|\Psi(0)|^2 = |A|^2 [\sin(k \cdot 0 + \alpha)]^2 = 0$

spełniony jest jedynie gdy $\alpha=0$.

Warunek brzegowy dla $x= L$: $|\Psi(L)|^2 = |A|^2 [\sin(k \cdot L)]^2 = 0$

spełniony jest jedynie gdy $kL=n\pi$.

$k = \frac{n\pi}{L}$ oraz $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ skąd $\boxed{E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2}$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Cząstka w studni potencjału -wnioski

Pytanie: czy n może być równe zeru?

Dla n=0 energia k=0 oraz $\Psi(x)$=A sin(0 • x)= 0.
Oznacza to, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w tym obszarze $\left|\Psi(x)\right|^2 \Delta x = 0$

Wniosek: najmniejsza wartość n=1. Cząstka musi mieć energię różną od zera. Najmniejsza energia:

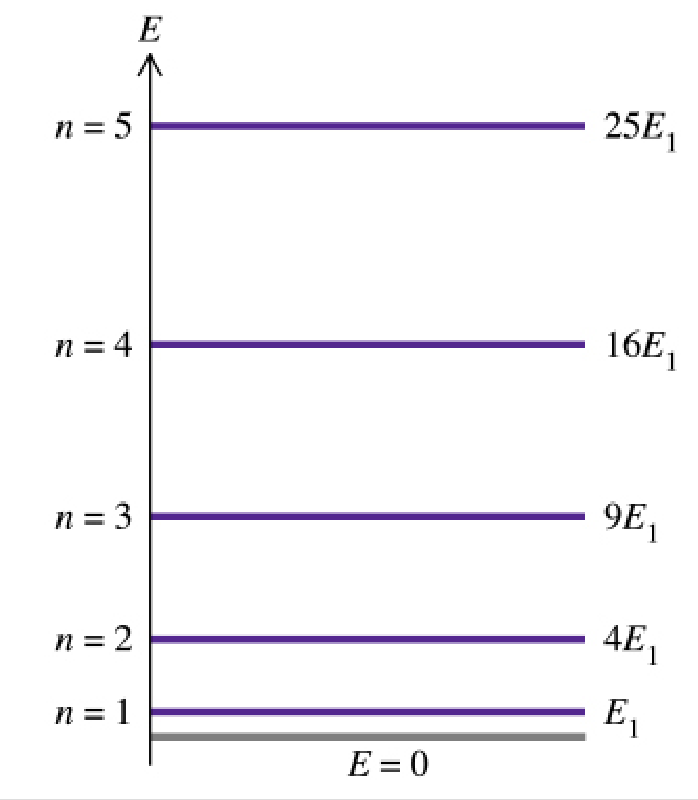
$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}1^2$$

Cząstka w studni potencjału -wnioski

W nieskończonej studni potencjału energia cząstki może przyjmować tylko pewne ściśle określone, różne od zera wartości:

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n^2$$

gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$



Cząstka w studni potencjału - wnioski

Funkcja falowa :

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{\boldsymbol{\pi n}}{\boldsymbol{L}}x$$

Warunek unormowania : cząstka musi się znajdować w obszarze 0-L:

$$\int_0^L |\psi_n(x)|^2 dx = 1$$

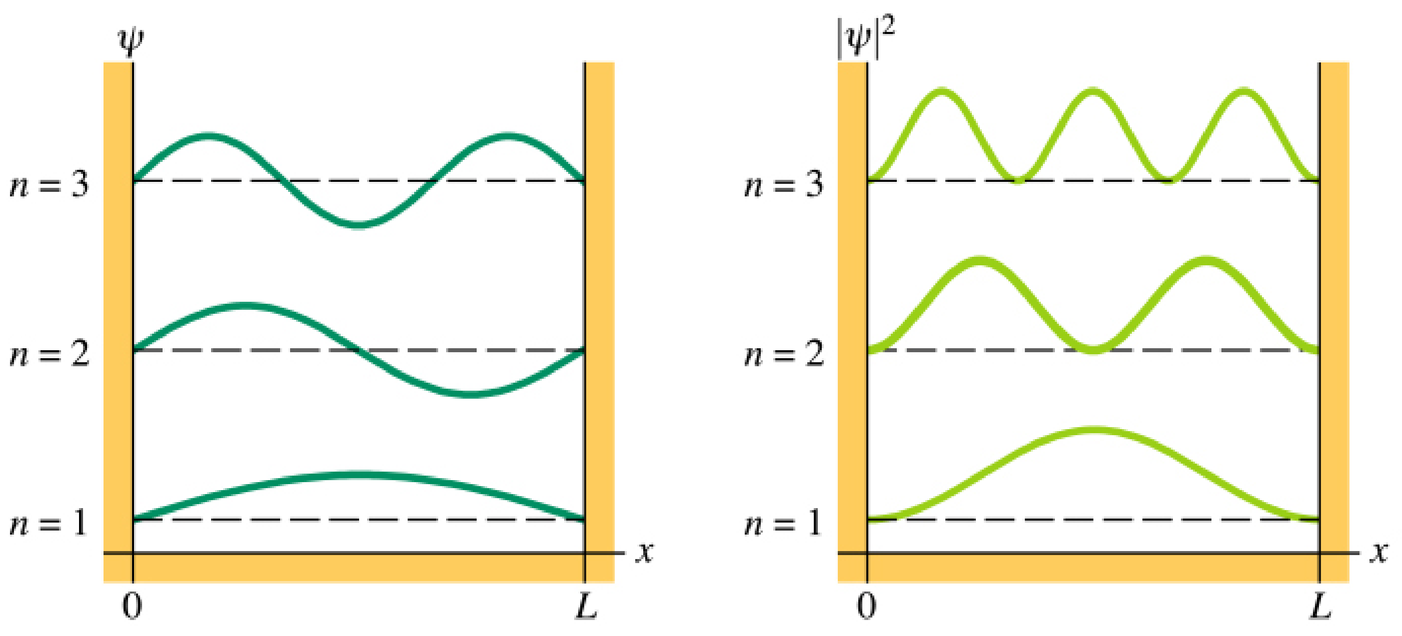
$$\int_0^L \left|A\sin\frac{\boldsymbol{\pi n}}{\boldsymbol{L}}x\right|^2 dx = 1 \qquad sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

Cząstka w studni potencjału -wnioski

Funkcja falowa : $\Psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(\frac{n\pi}{L} x)$

Wewnątrz studni powstaje fala stojąca materii z węzłami na brzegach studni.



Cząstka w studni potencjału -wnioski

Przykład 1

Pyłek o masie 1 g w studni o szerokości 1 cm

a) minimalna energia

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63\cdot 10^{-34} J\cdot s)^2}{8\cdot 10^{-3} kg\cdot 10^{-4} m^2} = 5.49\cdot 10^{-61} J = 3.43\cdot 10^{-42} eV$$

b) nr poziomu gdy porusza się z prędkością 3cm/s

$$E_n = \frac{1}{2} m v^2 = 4.5\cdot 10^{-10} J$$

$$E_n = n^2 E_1 \;\Rightarrow\; n = \sqrt{E_n / E_1} \cong 1.1\cdot 10^{16}$$

$$E_{n+1} - E_n = (2n+1)E_1 \approx 7.5\cdot 10^{-26} eV$$

Cząstka w studni potencjału -wnioski

Przykład 2

Elektron o masie 9.11x10^{-31} kg w studni o szerokości 0.2 nm.

a) minimalna energia

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{(6.63\cdot 10^{-34}\,J\cdot s)^2}{8\cdot(9.11\cdot 10^{-31}\,kg)\cdot(2\cdot 10^{-10}\,m)^2} = 1.51\cdot 10^{-18}\,J = 9.42\,eV$$

b) poziomy drugi i trzeci

$$E_2 = 4\cdot E_1 = 37.7\,eV$$

$$E_3 = 9E_1 = 84.8\,eV$$

$$E_2 - E_1 = 28.28\,eV$$

Kwantowanie energii

- Energia dowolnego obiektu jest skwantowana. Obiekt znajduje się na jednym z dozwolonych poziomów energetycznych
- Zmiana energii układu może odbywać się wyłącznie porcjami - *kwantami*
- W makroświecie odległość pomiędzy najbliższymi poziomami energetycznymi jest niemierzalnie mała

Kwantowanie energii - oscylator harmoniczny

Energia potencjalna oscylatora harmonicznego:

$$U(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Równanie Schrödingera dla oscylatora :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\Psi = E\Psi$$

Funkcje falowe Ψ będące rozwiązaniem tego równania muszą być ciągłe i posiadać ciągłe pierwsze pochodne. Takie rozwiązania istnieją wyłącznie wtedy gdy energia całkowita oscylatora posiada jedną z wartości:

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad gdzie \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Oscylator harmoniczny